VILNIAUS UNIVERSITETAS

JONAS ŠIAULYS

DINAMINĖS SISTEMOS

Vilnius 2003

TURINYS

I IVADAS 3

1.1 Populiacijų kitimas 3
1.2 Tankių kitimas dinaminėje sistemoje 5

II PAGALBINĖS SĄVOKOS IR REZULTATAI 13

2.1 Išmatuojamos erdvės ir matai 13
2.2 Lebego integralas 15
2.3 Erdvė L^p 19
2.4 Išmatuojamų erdvių sandauga 20
2.5 Funkcijų sekų konvergavimas 22

III MARKOVO, PERONO IR KUPMANO OPERATORIAI 27

3.1 Markovo operatoriai 27
3.2 Perono operatoriai 30
3.3 Kupmano operatoriai 40

IV DINAMINIŲ SISTEMŲ TRANSFORMACIJŲ RŪŠYS 44

4.1 Matą išsaugančios transformacijos 44
4.2 Ergodinės transformacijos 51
4.3 Sumaišančios ir užpildančios transformacijos 57

V OPERATORIŲ TAIKYMAS TRANSFORMACIJŲ TYRIMUI 61

5.1. Pagrindinės transformacijų klasifikavimo teoremos 61
5.2. 5.1.2 teoremos įrodymas 63
5.3. Transformacijų tyrimo pavyzdžiai 67

I
IVADAS

1.1 Populiacijų kitimas

Žodis „populiacija “ yra kilęs iš lotyniško žodžio „populus “ („liaudis “, „žmonės “). Lietuvių kalboje jis paprastai reiškia vienos biologinės rūšies individų grupę. Tačiau mokslo kalboje žodžio „populiacija “ vartosena taip išsiplėtė, kad dabar šis žodis jau gali reikšti bet kokių objektų (gyvų ar negyvų) visumą, kuri, laikui bėgant kinta, ir kurios kitimą norime kiekybiškai išreikšti. Todėl mes galime kalbėti ir apie paukščių, mašinų, šiukšlių, pinigų ir, be abejonės, žmonių populiaciją.

Matematikoje skiriami du populiacijų kitimo tipai: tolydusis ir diskretusis. Esant tolydžiam kitimui, populiacijos dydis keičiasi nuolat. Diskretų populiacijų kitimą galime įsivaizduoti kaip trūkčiojantį procesą: kažkiek laiko nieko nevyksta, po to būna staigus populiacijos pokytis (perėjima), po to vėl kažkiek laiko nieko nevyksta, po to vėl būna pokytis ir t. t. Žinoma „kažkiek laiko nevyksta “ gali trukti ir 100 metų, ir valandą, ir sekundę, ir milijoninę sekundės dalį. Pagrindinis populiacijos tyrimo uždavinys – numatyti, kas su ja atsitiks po tam tikro laikotarpio. Kartais kalbama apie konkretų laiko tarpą, o kartais apie ilgalaikį populiacijos kitimą. Kiekvienu atveju ką nors pasakyti apie konkrečios populiacijos kitimą galima tik nustačius pokyčius reguliuojančias taisykles. Jei žinotume, kaip kiekviename perėjime pakinta populiacijos dydis, tai dažnai galime sužinoti, kaip pasikeis populiacija po daugelio perėjimų. Konkrečios populiacijos kitimas gali būti pavaizduotas ilga skaičių virtine, kurią vadinsime populiacijos trajektorija. Schematiškai populiacijos trajektorijos sudarymas atrodo taip:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \text{Perėjimo taisyklė} & & \text{Perėjimo taisyklė} & & \text{Perėjimo taisyklė} & & \text{Perėjimo taisyklė} & & \\ x_0 & \longrightarrow & x_1 & \longrightarrow & x_2 & \longrightarrow & x_3 & \longrightarrow & x_{100} & \ldots \\ \text{Pradinė populiacija} & & \text{Pirmoji karta} & & \text{Antroji karta} & & \text{Trečioji karta} & & \text{Šimtoji karta} & \end{array}$$

Jeigu perėjimo taisyklė visuose perėjimuose yra ta pati S, tai populiacijos trajektorija įgauna pavidalą

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), S^3(x_0), \ldots,$$

kur $S^2(x_0) = S(S(x_0))$, $S^{n+1}(x_0) = S(S^n(x_0))$.

Aišku, kad tokiu atveju populiacijos trajektorija priklauso nuo pradinės populiacijos x_0 ir nuo perėjimo taisyklės S. Galime laikyti, kad pradinės populiacijos dydis x_0 priklauso kažkokiai aibei X. Tada perėjimo taisyklė S yra funkcija $X \to X$.

Kai kurioms funkcijoms S visoms pradinės populiacijos reikšmėms x trajektorijos $x, S(x)$, $S^2(x), \ldots$ elgesys maždaug vienodas, kitoms funkcijoms S trajektorijų elgesys labai priklauso nuo pradinės x reikšmės. Natūraliai iškyla uždavinys išsiaiškinti kiek yra x reikšmių, kurių trajektorijos turi tam tikrų savybių. Tikimybių teorijos požiūriu, reikėtų rasti x reikšmių, kurių trajektorijos turi specialių savybių, matą. Vadinasi, natūralu aibėje X įvesti σ algebrą $\mathcal{A}$ ir matą μ. Taigi natūralu nagrinėti S apibrėžtą išmatuojamoje erdvėje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Išmatuojamą erdvę $(X, \mathcal{A}, \mu)$ kartu su transformacija $S : X \to X$ toliau vadinsime dinamine sistema.

Dažnai literatūroje (žr. pavyzdžiui [9]) tokios sistemos dar vadinamos diskretaus laiko dinaminėmis sistemomis, siekiant jas atskirti nuo kitų rūšių dinaminių sistemų. Kadangi kitokių dinaminių sistemų šiame darbe nenagrinėsime, tai visada ketvertą $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ vadinsime tiesiog dinamine sistema.

Toliau pateiksime keletą pavyzdžių susijusių su populiacijų kitimu. Matysime kaip nuo atvaizdžio S pavidalo priklauso įvairių populiacijų trajektorijos.

I. Sakykime naujai atidarytame savartyne yra susikaupę 1000 tonų šiukšlių. Planuojama, kad savartynas pasipildys po 100 tonų kas mėnesį. Rasime kiek šiukšlių savartyne bus po 4 metų.

Nagrinėjamu atveju $x_0 = 1000$, $S(x) = x + 100$. Vadinasi, po 4 metų šiukšlių bus

$$S^{48}(x_0) = S^{47}(x_0 + 100) = S^{46}(x_0 + 200) = S^{45}(x_0 + 300) = \ldots = x_0 + 48 \cdot 100 = 5800\text{tonų}.$$

Nesunku pastebėti, kad šiame pavyzdyje esant pradiniam šiukšlių kiekiui x_0, po n mėnesių šiukšlių bus

$$S^n(x_0) = x_0 + n \cdot 100.$$

Taigi visiems x_0 trajektorijos

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$$

lėtai didėja.

II. Sakykime 1000 Lt padedame į sąskaitą, kurioje priskaičiuojama 5% palūkanų (palūkanos skaičiuojamos kartą per metus metų gale). Rasime kiek pinigų sąskaitoje bus po 25 metų, jei palūkanos paliekamos sąskaitoje.

Nagrinėjamu atveju $x_0 = 1000$, $S(x) = 1,05x$.

Vadinasi, po 25 metų sąskaitoje turėsime

$$S^{25}(x_0) = S^{24}(1.05x_0) = S^{23}((1,05)^2 x_0) = \ldots = (1,05)^{25} \cdot 1000 = 3386,35Lt.$$

Nesunku pastebėti, kad šiame pavyzdyje esant pradiniam įnašui x_0, po n metų sąskaitoje turėsime

$$S^n(x_0) = (1,05)^n x_0 Lt.$$

Taigi visiems x_0 trajektorijos

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$$

greitai auga.

III. Sakykime tvenkinyje norime įveisti upėtakių. Sakykime pradinė populiacijos būsena $x_0 = 0,2$ (tai reiškia, jog išnaudota 20% tvenkinio talpos), o populiacijos kitimą valdo logistinis atvaizdis $S(x) = 2,5x(1-x)$. Rasime kiek upėtakių bus po 10 metų.

Nesunku rasti, kad

$$\begin{aligned}
&S(x_0) = S(0,2) = 0,4 \\
&S^2(x_0) = S(0,4) = 0,6 \\
&S^3(x_0) = S(0,6) = 0,6 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&S^{10}(x_0) = 0,6.
\end{aligned}$$

Taigi po 10 metų upėtakiai užims 60% tvenkinio talpos.

Pasirenkant įvairias x_0 reikšmes, galima pastebėti, kad

$$\lim_{n\to\infty} S^n(x_0) = 0,6.$$

Taigi visiems $x_0 (x_0 \in (0,1))$ trajektorijos

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$$

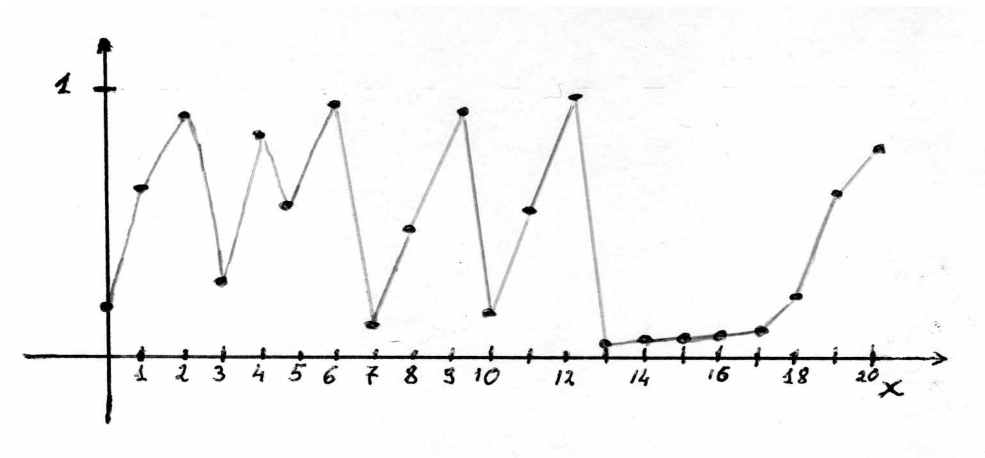
n-asis narys konverguoja prie 0,6.

IV. Sakykime tiriant tarakonų populiaciją paiškėjo, kad ji valdoma logistinio atvaizdžio $S(x) = 4x(1-x)$. Sakykime pradinė tarakonų populiacijos būsena $x_0 = 0,2$. Rasime tarakonų populiacijos trajektoriją dvidešimčiai metų.

Nesunku surasti, kad

$x_0 = 0,2,$	$S(x_0) = 0,6400,$	$S^2(x_0) = 0,9216,$	$S^3(x_0) = 0,2890,$
$S^4(x_0) = 0,8219,$	$S^5(x_0) = 0,5854,$	$S^6(x_0) = 0,9708,$	$S^7(x_0) = 0,1133,$
$S^8(x_0) = 0,0402,$	$S^9(x_0) = 0,9616,$	$S^{10}(x_0) = 0,1478,$	$S^{11}(x_0) = 0,5039,$
$S^{12}(x_0) = 0,9999,$	$S^{13}(x_0) = 0,0002,$	$S^{14}(x_0) = 0,0010,$	$S^{15}(x_0) = 0,0039,$
$S^{16}(x_0) = 0,0157,$	$S^{17}(x_0) = 0,0617,$	$S^{18}(x_0) = 0,2317,$	$S^{19}(x_0) = 0,7121,$
$S^{20}(x_0) = 0,8200.$			

Galime gautą populiacijos trajektoriją pavaizduoti grafiškai



(1.1)

Netikėta, tačiau šiuo atveju nėra jokios aiškios populiacijos kitimo tendencijos. Nors populiacijos kitimą valdo visiškai tiksli formulė, tačiau populiacijos kitimas chaotiškas.

Vykdant skaitinius eksperimentus nesunku įsitikinti, kad chaotiška populiacijos trajektorija (1.1) gaunama beveik visiems $x_0 \in [0,1]$. Be to, dar galima pastebėti, kad labai nežymiai pakeičiant pradinę x_0 reikšmę trajektorija $x_0, S(x_0), S^2(x_0), \dots$ pasikeičia neatpažįstamai.

1.2 Tankių kitimas dinaminėje sistemoje

I. Kaip matėme praeito skyrelio ketvirtajame pavyzdyje intervalo $[0,1]$ transformacijos $S(x) = 4x(1-x)$ beveik visos trajektorijos

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \dots$$

yra chaotiškos. Iškyla klausimas kaip galima tirti chaotiškas trajektorijas. Juk teiginys, kad trajektorijos chaotiškos ne visada mus gali tenkinti. Vienas iš galimų būdų aprašyti chaotišką trajektoriją, tai pasakyti, kaip dažnai $S^n(x_0)$ pakliūna į kokią nors intervalo $[0,1]$ dalį.

Padalinkime intervalą $[0,1)$ į m nesikertančių intervalų

$$[0,1) = \left[0, \frac{1}{m}\right) \cup \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right) \cup \ldots \cup \left[\frac{m-1}{m}, 1\right).$$

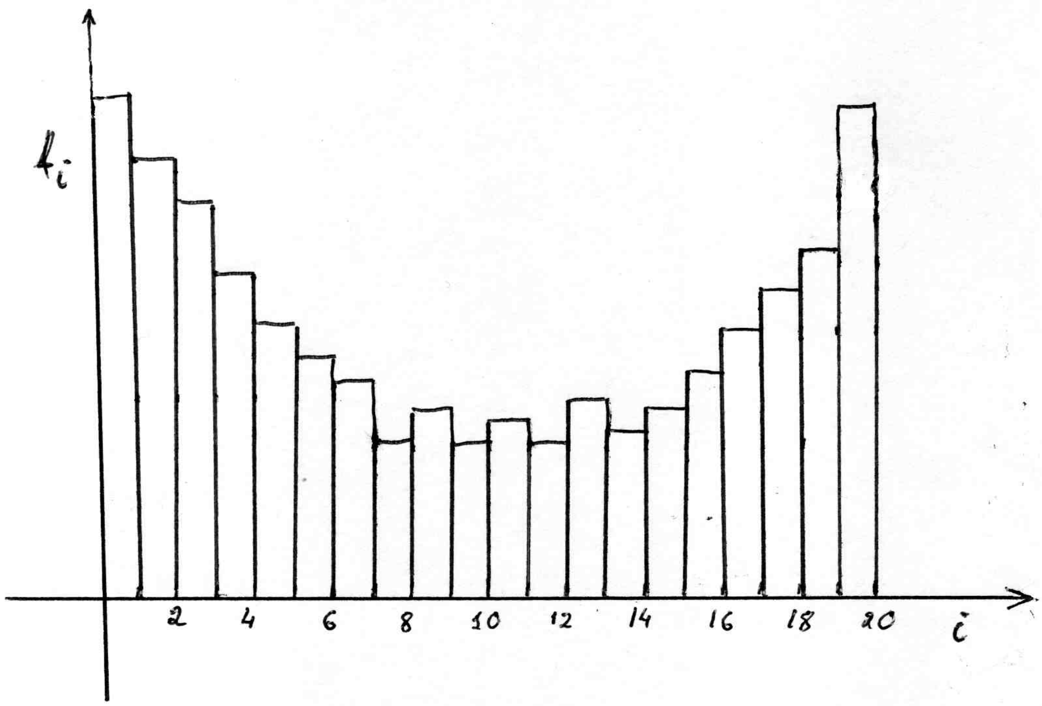
Sakykime $x_0 \in [0,1)$ pradinė būsena, o

$$x_0, S(x_0), S^2(x_0), \dots, S^n(x_0)$$

pakankamai ilga (n daug didesnis už m) trajektorijos dalis. Tegul

$$f_i = \frac{1}{n}\ \#\left\{\text{skaičius indeksų } j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{kuriems } S^j(x_0) \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m}\right)\right\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Pasirinkus $x_0 = \pi/10$, $n = 5000$ ir $m = 20$ po ilgų ir varginančių skaičiavimų gausime, jog trajektorijos dažnių f_i histograma atrodo taip:



(1.2)

Kartodami skaitinį eksperimentą, kitoms pradinėms būsenoms x_0, gaunamas analogiškas vaizdas. Žinome, jeigu būsenai x_0, $S^j(x_0)$ kokiam nors j nepataiko į vieną iš nejudamų taškų 0 ir 3/4. Labiau smulkinant intervalą $[0, 1)$ ir didinant trajektorijos ilgį gaunama histograma vis artimesnė tam tikros tankio funkcijos grafikui.

II. Norint tiksliau nusakyti kaip netvarką gimdanti transformacija S veikia daugumą pradinių būsenų, reikia nagrinėti ne individualias trajektorijas $x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$, o surasti kaip keičiasi pradinės būsenos skirstinys veikiant transformacijai S. Prielaida, kad pradinė būsena x_0 pasiskirsčiusi pagal tam tikrą dėsnį su tankiu $f_0(x)$ panaikina atskiros pradinės būsenos x_0 įtaką galutiniam rezultatui.

Sakykime $S : [0, 1] \to [0, 1]$, pradinės būsenos $x_0 \in [0, 1]$ skirstinys turi tankį $f_0(x)$, o $S(x_0)$ skirstinys turi tankį $f_1(x)$. Imkime N pradinių būsenų

$$x_0^1, x_0^2, x_0^3, \ldots, x_0^N.$$

Bet kuriam intervalui $\Delta_0 \subset [0, 1]$

$$\int\limits_{\Delta_0} f_0(u)\, du = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{I}_{\Delta_0}(x_0^j). \tag{1.3}$$

Tegul
$$x_1^1 = S(x_0^1), \quad x_1^2 = S(x_0^2), \quad \ldots \quad x_1^N = S(x_0^N).$$

Tada bet kuriam $\Delta \subset [0,1]$

$$\int\limits_{\Delta} f_1(u)\,du = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{\Delta}(x_1^j). \tag{1.4}$$

Bet kuriam intervalui $\Delta \subset [0,1]$

$$x_1^j \in \Delta \quad \Leftrightarrow \quad x_0^j \in S^{-1}(\Delta).$$

Vadinasi, $\mathbb{1}_{\Delta}(S(x)) = \mathbb{1}_{S^{-1}(\Delta)}(x)$. Taigi iš (1.4) gauname

$$\int\limits_{\Delta} f_1(u)\,du = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{S^{-1}(\Delta)}(x_0^j).$$

Lygybėje (1.3) pasirinkę $\Delta_0 = S^{-1}(\Delta)$, gauname

$$\int\limits_{S^{-1}(\Delta)} f_0(u)\,du = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbb{1}_{S^{-1}(\Delta)}(x_0^j).$$

Iš dviejų paskutinių lygybių išplaukia ryšys tarp tankių $f_0(x)$ ir $f_1(x)$. Būtent

$$\int\limits_{\Delta} f_1(u)\,du = \int\limits_{S^{-1}(\Delta)} f_0(u)\,du$$

Pasirinkus specialaus pavidalo $\Delta = [0,x]$, gauname

$$\int\limits_0^x f_1(u)\,du = \int\limits_{S^{-1}([0,x])} f_0(u)\,du,$$

arba

$$f_1(x) = \left(\int\limits_{S^{-1}([0,x])} f_0(u)\,du \right)'_x$$

beveik visiems $x \in [0,1]$.

Gavome tankio $f_1(x)$ išraišką tankiu $f_0(x)$. Gauta lygybė paprastai užrašoma pavidalu

$$f_1 = P f_0,$$

kur

$$Pf(x) = \left(\int\limits_{S^{-1}([a,x])} f(u)\,du \right)'_x \tag{1.5}$$

yra vadinamasis Perono operatorius veikiantis integruojamų funkcijų aibėje. Kaip matome Perono operatoriaus pagalba galime rasti kaip keičiasi būsenų tankiai intervalą $[0,1]$ veikiant transformacija S.

Pastebėsime, kad Perono operatoriaus apibrėžimas, savybės ir veikimas bendresniu atveju bus aptarti 3 skyriuje.

III. Sakykime vėl $S(x) = 4x(1-x)$ intervalo $[0,1]$ transformacija. Išsiaiškinsime kaip ši chaosą gimdanti transformacija keičia pradinės būsenos tankį.

Iš (1.5) lygybės galima rasti, kad

$$Pf(x) = \frac{1}{4\sqrt{1-x}}\Big(f\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\Big)+f\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}\Big)\Big)$$

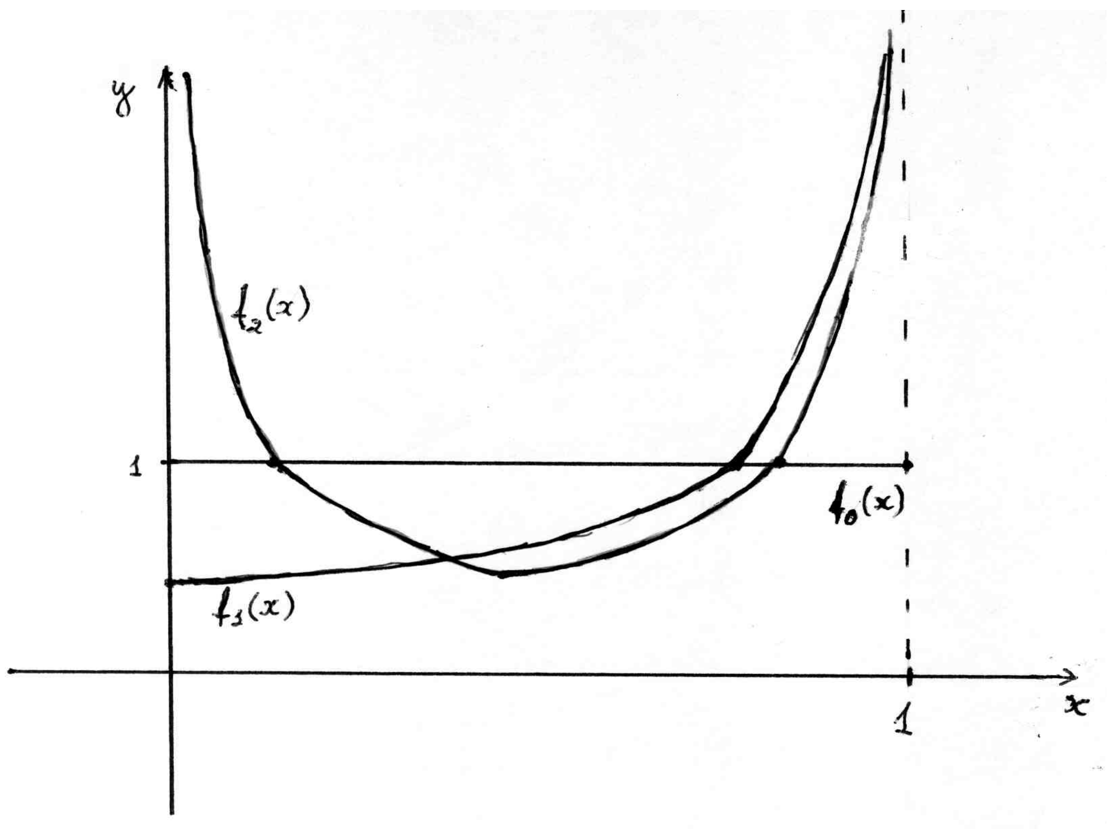
(smulkiau žr. 4.1.2 pavyzdį).

Paskutinė formulė leidžia rasti bet kurios tankio funkcijos vaizdą veikiant intervalą $[0,1]$ atvaizdžiu $S(x) = 4x(1-x)$. Sakykime pradinis tankis $f_0(x) = 1$, $x \in [0,1]$. Tada:

$$f_1(x) = Pf_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

$$f_2(x) = Pf_1(x) = \frac{\sqrt{2}}{8\sqrt{1-x}}\Big(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1-x}}}+\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}\Big).$$

Nubrėžkime gautų tankių grafikus



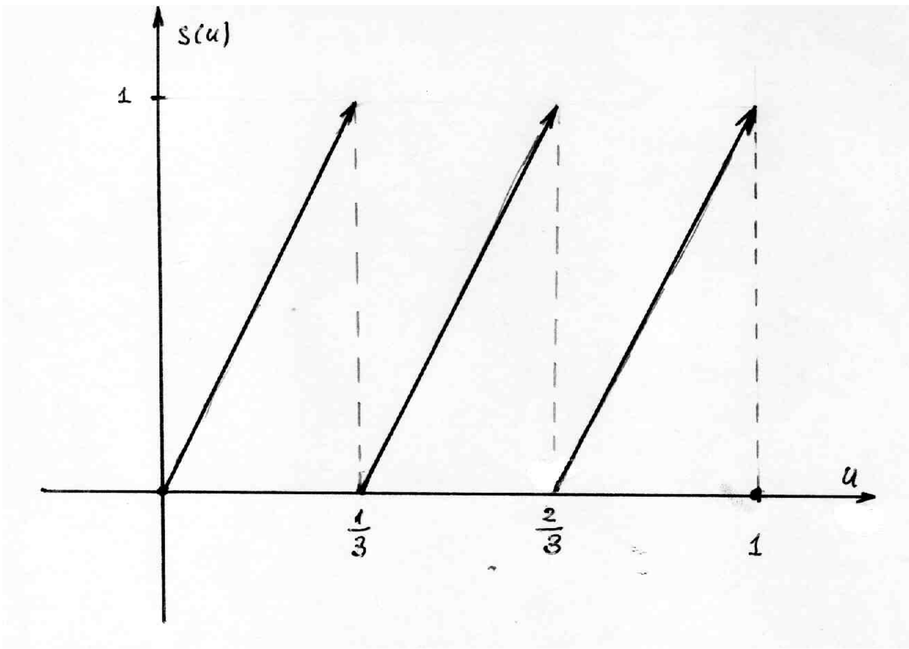
Po ilgų ir varginančių skaičiavimų galima gauti, jog $P^n f_0(x)$ turi ribą. Būtent

$$P^n f_0(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Gauto ribinio tankio pavidalas paaiškina histogramą (1.2).

IV. Sakykime intervalas $[0,1]$ veikiamas atvaizdžiu $S(x) = \{3x\}$.

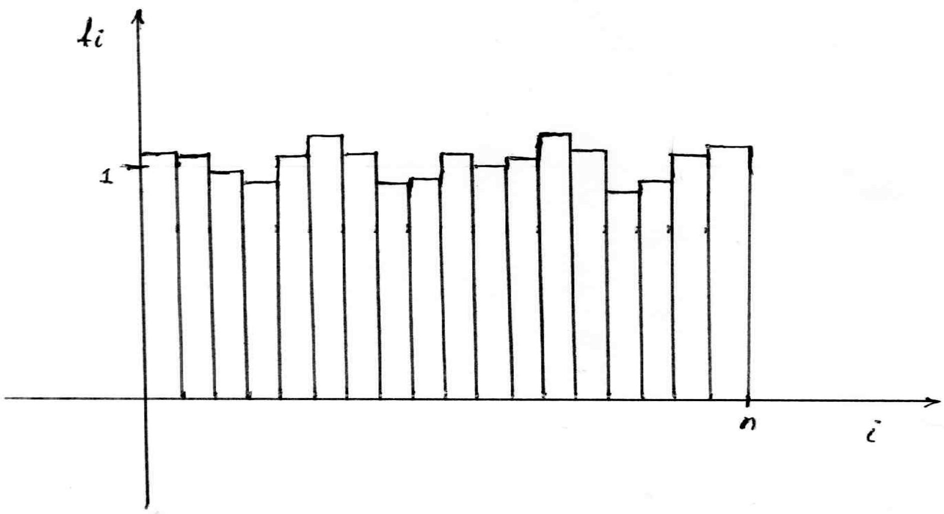
Transformacijos $S(u)$ grafikas atrodo taip:



Nesunku įsitikinti, kad daugeliui pradinių būsenų x_0 trajektorijos $x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$ yra chaotiškos. Jų grafinis vaizdas panašus į (1.1) grafiką. Tačiau suskaičiavę ir nubrėžę trajektorijos $x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots, S^n(x_0)$ histogramą, beveik visiems $x_0 \in [0, 1]$ gausime vaizdą skirtingą nuo pavaizduoto (1.2) piešinyje. Būtent beveik visiems x_0 dažnių

$$f_i = \frac{1}{n} \# \left\{ \text{skaičius indeksų } j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{kuriems } S^j(x_0) \in \left[\frac{i-1}{m}, \frac{i}{m} \right) \right\} \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

grafinis vaizdas maždaug toks:



(1.6)

Rasime transformacijos $S(x) = \{3x\}$ Perono operatorių ir pažiūrėsime kaip keičiasi tankiai veikiant transformacijai S.

Iš $S(u)$ grafiko nesunku rasti, kad

$$S^{-1}\big([0,x]\big) = \Big[0, \frac{x}{3}\Big] \cup \Big[\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{x}{3}\Big] \cup \Big[\frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \frac{x}{3}\Big]$$

visiems $x \in [0,1]$.

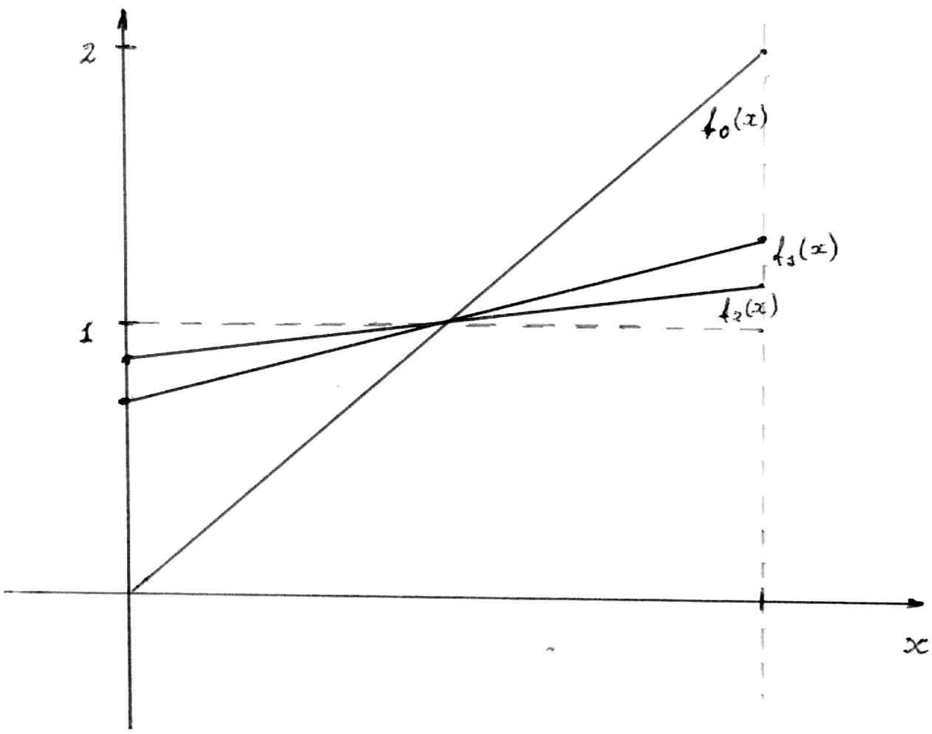
Todėl iš (1.5) formulės

$$Pf(x) = \Bigg(\int\limits_{S^{-1}([0,x])} f(u)\,du \Bigg)'_x = \Bigg(\int\limits_0^{x/3} f(u)\,du + \int\limits_{1/3}^{1/3+x/3} f(u)\,du + \int\limits_{2/3}^{2/3+x/3} f(u)\,du \Bigg)'_x$$
$$= \frac{1}{3}\bigg(f\Big(\frac{x}{3}\Big) + f\Big(\frac{1}{3} + \frac{x}{3}\Big) + f\Big(\frac{2}{3} + \frac{x}{3}\Big)\bigg).$$

Pasirinkę pradinį tankį $f_0(x) = 2x$, $x \in [0,1]$, gauname:

$$f_1(x) = Pf_0(x) = \frac{1}{3}\Big(\frac{2x}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{4}{3} + \frac{2x}{3}\Big) = \frac{2x}{3} + \frac{2}{3},$$
$$f_2(x) = Pf_1(x) = \frac{1}{3}\Big(\frac{2x}{9} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{2x}{9} + \frac{2}{3}\Big) = \frac{2x}{9} + \frac{8}{9},$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n(x) = Pf_{n-1}(x) = \frac{2x}{3^n} + \frac{3^n - 1}{3^n}.$$

Gautų tankių grafikai atrodo taip:



Aišku, kad šiuo atveju

$$\lim_{n\to\infty} P^n f(x) = 1$$

visiems $x \in [0,1]$.

V. Iš išnagrinėtų pavyzdžių aiškiai matosi, kad yra glaudus ryšys tarp atvaizdžio $S : [0,1] \to [0,1]$ trajektorijų $x_0, S(x_0), S^2(x_0), \ldots$ elgesio ir tankių kitimo veikiant transformacijai f. Dar išnagrinėsime du pavyzdžius su labai aiškiu trajektorijų elgesiu. Parodysime, kad ir esant tokiai situacijai tankių elgesys suderinamas su trajektorijų elgesiu.

Sakykime $S(x) = \alpha x$, $\alpha > 1$ yra erdvės $\mathbb{R}$ transformacija.

Kadangi

$$\begin{aligned} &S(x) = \alpha x, \\ &S^2(x) = S(\alpha x) = \alpha^2 x, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &S^n(x) = \alpha^n x, \end{aligned}$$

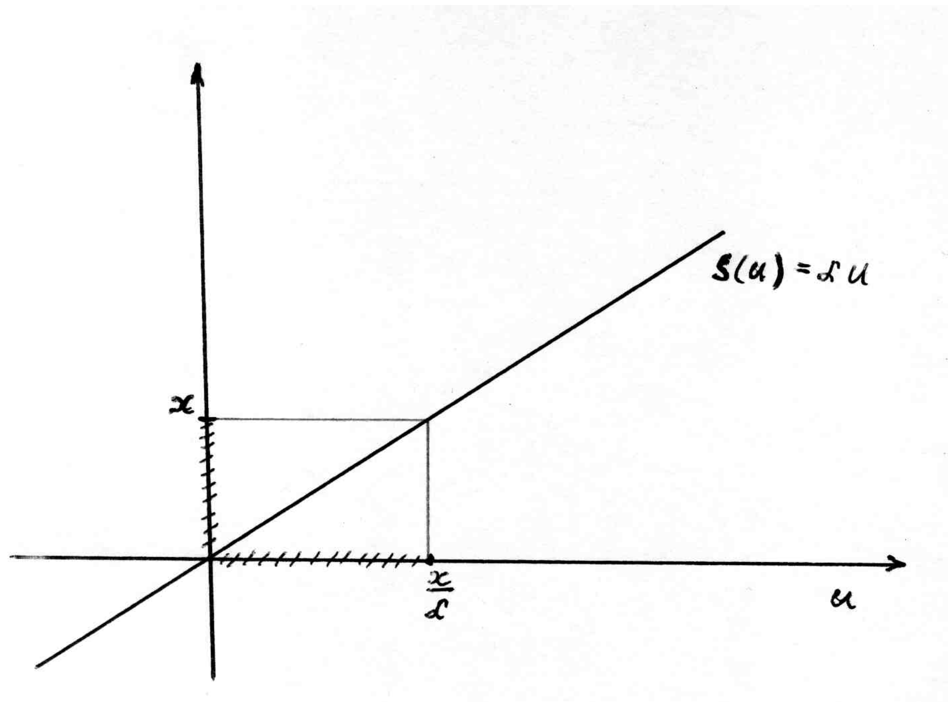
tai

$$\lim_{n\to\infty} \big|S^n(x)\big| = \infty$$

visiems $x \neq 0$.

Taigi visos trajektorijos, kokią pradinę būseną beimtume, pabėga į ∞.

Antra vertus iš grafiko



gauname $S^{-1}([0,x]) = \left[0, \frac{x}{\alpha}\right]$. Todėl iš (1.5) formulės

$$Pf(x) = \Bigg(\int\limits_{S^{-1}([0,x])} f(u)\, du \Bigg)'_x = \int\limits_0^{x/\alpha} f(u)\, du = \frac{1}{\alpha} f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big).$$

Taigi:

$$\begin{aligned}
&Pf(x) = \frac{1}{\alpha} f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big),\\
&P^2 f(x) = P\big(Pf(x)\big) = P\bigg(\frac{1}{\alpha} f\Big(\frac{x}{\alpha}\Big)\bigg) = \frac{1}{\alpha^2} f\Big(\frac{x}{\alpha^2}\Big),\\
&\dots\dots\dots\\
&P^n f(x) = \frac{1}{\alpha^n} f\Big(\frac{x}{\alpha^n}\Big).
\end{aligned}$$

Bet kuriam $[-A, A] \in \mathbb{R}$, turime

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-A}^{A} P^n f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-A/\alpha^n}^{A/\alpha^n} f(x)\, dx = 0.$$

Taigi bet kurio baigtinio intervalo tankis artėja į 0. Šį kart trajektorijos pabėga į begalybę, todėl bet kuris tankis išnyksta.

Jei $S(x) = \alpha x$, $0 < \alpha < 1$ yra erdvės $\mathbb{R}$ transformacija tai analogiškai gauname:

$$\lim_{n\to\infty} \big|S^n(x)\big| = 0, \qquad \text{visiems} \quad x \in \mathbb{R},$$

bet kokiam intervalui $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ir bet kuriam tankiui $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P^n f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-\varepsilon/\alpha^n}^{\varepsilon/\alpha^n} f(x)\, dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Taigi šiuo atveju trajektorijos artėja į nulį, o tankiai veikiami transformacijos S koncentruojasi apie 0.

II PAGALBINĖS SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyrelyje išdėstysime apibrėžimus ir kai kuriuos rezultatus iš tikimybių teorijos ir funkcinės analizės. Daugumą šiame skyrelyje pateiktų apibrėžimų ir rezultatų galima rasti knygose [1], [2], [3]. Pateikti faktai bus naudojami sekančiuose skyreliuose.

2.1 Išmatuojamos erdvės ir matai

2.1.1 APIBRĖŽIMAS. *Aibės X poaibių sistema $\mathcal{A}$ vadinama σ-algebra, kai tenkinamos sąlygos:*

(a) *jei* $A \in \mathcal{A}$, *tai* $X \setminus A \in \mathcal{A}$,

(b) *jei* $A_k \in \mathcal{A}$, *visiems* $k = 1, 2, \ldots$, *tai* $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$,

(c) $X \in \mathcal{A}$.

Iš šio apibrėžimo aišku, kad $\emptyset \in \mathcal{A}$, nes $\emptyset = X \setminus X$. Be to, jei $A_k \in \mathcal{A}$ visiems $k = 1, 2, \ldots$, tai $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, nes

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = X \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \setminus A_k).$$

Pagaliau bet kurioms dviems $A, B \in \mathcal{A}$ skirtumas $A \setminus B \in \mathcal{A}$, nes $A \setminus B = A \cap (X \setminus B)$.

2.1.2 APIBRĖŽIMAS. *Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ apibrėžta aibės X poaibių σ-algebroje vadinama matu, jei tenkinamos sąlygos:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$,

(b) $\mu(A) \geqslant 0$ *visoms* $A \in \mathcal{A}$,

(c) *jei* $A_k \in \mathcal{A}$, *visiems* $k = 1, 2, \ldots$, *ir* $A_i \cup A_j = \emptyset$ *visiems* $i \neq j$,

tai

$$\mu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

2.1.3 APIBRĖŽIMAS. *Trejetas $(X, \mathcal{A}, \mu)$, kur X yra bet kokia netuščia aibė, $\mathcal{A}$ - jos poaibių σ-algebra, o μ - matas, vadinamas išmatuojama erdve. Aibės priklausančios $\mathcal{A}$ vadinamos išmatuojamomis (nes joms ir tik joms apibrėžtas matas μ).*

Aišku, kad trejetas:

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$,
$\mathcal{A} = \{\text{visi galimi } X \text{ poaibiai}\}$,
$\mu :\ \mu(x_i) = p_i,\ i = 1, 2, \ldots, N,$ kur $p_1, p_2, \ldots, p_N$ neneigiami skaičiai,

yra išmatuojamos erdvės pavyzdys. Šioje erdvėje bet kurio poaibio $A = \{x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \ldots, x_{\alpha_k}\} \subset X$ matas lygus $\mu(A) = p_{\alpha_1} + p_{\alpha_2} + \ldots + p_{\alpha_k}$.

Aibėse $X = [0,1]$ arba $X = \mathbb{R}$ dažniausiai nagrinėjama σ-algebra yra Borelio σ-algebra $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ yra mažiausia X poaibių σ-algebra, kuriai priklauso visi intervalai. Mažiausia σ-algebra tai reiškia, kad bet kuri kita σ-algebra turinti visus intervalus turi visas aibes iš $\mathcal{B}$. Borelio σ-algebroje egzistuoja vienintelis matas μ turintis savybę: $\mu([a,b]) = b - a$. Šis matas vadinamas Borelio matu ir žymimas m.

2.1.4 APIBRĖŽIMAS. *Išmatuojama erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinama σ-baigtine, jeigu egzistuoja seka $A_k \in \mathcal{A}$, $k = 1, 2, \ldots$, tenkinanti sąlygą:*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \qquad \mu(A_k) < \infty \quad \textit{visiems} \quad k.$$

Erdvė $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ yra σ-baigtinė išmatuojama erdvė, nes

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]$$

ir

$$m([-k,k]) = 2k < \infty \quad \text{visiems} \quad k.$$

2.1.5 APIBRĖŽIMAS. *Išmatuojama erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinama baigtine, jeigu $\mu(X) < \infty$. Atskiru atveju, kai $\mu(X) = 1$, išmatuojama erdvė vadinama tikimybine.*

Toliau visame darbe laikysime, kad visos nagrinėjamos išmatuojamos erdvės yra σ-baigtinės.

Jeigu kokia nors savybė teisinga visoje išmatuojamoje erdvėje išskyrus poaibį, kurio matas lygus 0 sakysime, kad ta savybė teisinga išmatuojamoje erdvėje beveik visur (b. v.).

Iš mato adityvumo (2.1.2 (c)) savybės išplaukia mato monotoniškumas, t. y. :

$$A, B \in \mathcal{A}, \; A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B).$$

$\triangleright$ Iš tiesų:

$$\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A).$$

Kadangi

$$\mu(B \setminus A) \geqslant 0,$$

tai

$$\mu(B) \geqslant \mu(A). \qquad \triangleleft$$

Vadinasi, jei $\mu(B) = 0$ ir $A \subset B$, $A \in \mathcal{A}$, tai $\mu(A) = 0$. Tačiau šis sąryšis galioja tik tada, kai A išmatuojama. Tuo atveju, kai $\mu(B) = 0$, $A \subset B$, $A \notin \mathcal{A}$ apie $\mu(A)$ nieko negalime pasakyti.

2.1.6 APIBRĖŽIMAS. *Išmatuojama erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinama pilna, jeigu: $\mu(B) = 0$, $A \subset B \Rightarrow A \in \mathcal{A}$.*

Be abejo ne visi matai yra pilni. Tačiau bet kuriai išmatuojamai erdvei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ egzistuoja pilna išmatuojama erdvė $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*)$, kuriai $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$ ir $\mu^*(A) = \mu(A)$ visoms $A \in \mathcal{A}$.

2.2 Lebego integralas

2.2.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ yra išmatuojama erdvė. Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ vadinama išmatuojama, jeigu $f^{-1}(\Delta) \in \mathcal{A}$ visiems intervalams $\Delta \subset \mathbb{R}$.*

Paprasčiausia išmatuojama funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ yra aibės $A \in \mathcal{A}$ indikatorius

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Iš tiesų, bet kuriam intervalui Δ

$$\mathbb{1}_A^{-1}(\Delta) = \begin{cases} A, & \text{jei } 1 \in \Delta, \\ X \setminus A, & \text{jei } 1 \notin \Delta. \end{cases}$$

Kadangi $A \in \mathcal{A}$ ir $X \setminus A \in \mathcal{A}$, tai $\mathbb{1}_A(x)$ išmatuojama funkcija.

Sakykime $f : X \Rightarrow \mathbb{R}$ yra aprėžta neneigiama ($0 \leqslant f(x) \leqslant M < \infty$) išmatuojama funkcija. Padalinkime intervalą $[0, M]$ į n lygių dalių. Gausime

$$0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = M, \quad a_i = \frac{Mi}{n}, \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Tegul

$$A_i = \big\{x : \ f(x) \in [a_i, a_{i+1})\big\}, \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Aišku, kad $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, nes f yra išmatuojama. Be to, visiems x

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{n-1} a_i \mathbb{1}_{A_i}(x) \right| \leqslant \frac{M}{n}.$$

Vadinasi, bet kurią aprėžtą neneigiamą išmatuojamą funkciją galima kaip norima tiksliai tolygiai aproksimuoti baigtine indikatorių tiesine kombinacija. Šis faktas yra esminis Lebego integralo apibrėžime.

Toliau pateikiame keturių dalių Lebego integralo apibrėžimą.

2.2.2(1) APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, kai $i \neq j$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – realūs skaičiai. Funkcijos*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbb{1}_{A_i}(x)$$

integralu vadiname dydį

$$\int_X g(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu(A_i).$$

Funkcija $g(x)$ turinti apibrėžime nurodytą pavidalą dažnai vadinama paprastąja.

2.2.2(2) APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, $f : X \to \mathbb{R}$ išmatuojama, neneigiama aprėžta funkcija. Tegul g_n yra seka paprastųjų funkcijų tolygiai koverguojančių į f. Tada funkcijos f Lebego integralu vadinamas dydis*

$$\int_X f(x)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x)\mu(dx).$$

Riba užrašyta paskutinėje lygybėje egzistuoja. Be to, ši riba nepriklauso nuo paprastųjų funkcijų sekos tolygiai konverguojančios į funkciją f parinkimo.

2.2.2(3) APIBRĖŽIMAS. *Tegul $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, $f : X \to \mathbb{R}$ neneigiama išmatuojama funkcija. Sakykime*

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x), & jei\ 0 \leqslant f(x) \leqslant M, \\ M, & jei\ f(x) > M. \end{cases}$$

Funkcijos f Lebego integralu vadiname dydį

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \lim_{M\to\infty} \int\limits_X f_M(x)\mu(dx).$$

Nesunku pastebėti, kad $\int\limits_X f_M(x)\mu(dx)$ didėja didėjant M. Vadinasi, paskutinėje lygybėje užrašyta riba egzistuoja. Deja ši riba kai kurioms funkcijoms f gali būti lygi ∞.

2.2.2(4) APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, o $f : X \to \mathbb{R}$ – išmatuojama funkcija. Tegul*

$$f^+(x) = \max(0, f(x)), \qquad f^-(x) = \max(0, -f(x)).$$

Jei bent vienas iš dydžių

$$\int\limits_X f^+(x)\mu(dx), \qquad \int\limits_X f^-(x)\mu(dx)$$

yra baigtinis, tai funkcijos f Lebego integralu vadiname dydį

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f^+(x)\mu(dx) - \int\limits_X f^-(x)\mu(dx).$$

Jeigu abu minėti dydžiai yra baigtiniai, tai tokia išmatuojama funkcija f vadinama integruojama.

Apibrėžimai 2.2.2(1)–2.2.2(4) nusako bet kurios išmatuojamos funkcijos integralą erdvėje $(X, \mathcal{A}, \mu)$. Aibėje $A \in \mathcal{A}$ Lebego integralas apibrėžiamas lygybe

$$\int\limits_A f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mathbb{I}_A(x)\mu(dx).$$

Toliau pateikiame pagrindines Lebego integralo savybes.

2.2.1 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė. Teisingi tokie tvirtinimai.*

(L1) *Jei $f, g : X \to \mathbb{R}$ yra išmatuojamos, g – integruojama ir $|f(x)| \leqslant g(x)$, tai f irgi integruojama, be to*

$$\left| \int\limits_X f(x)\mu(dx) \right| \leqslant \int\limits_X g(x)\mu(dx).$$

(L2) *Integralas*

$$\int\limits_X |f(x)|\mu(dx) = 0$$

tada ir tik tada, kai $f(x) = 0$ *b. v.*

(L3) *Jei* $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ *integruojamos, tada visiems realiems* λ_1, λ_2 *tiesinė kombinacija* $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ *irgi integruojama, be to*

$$\int\limits_X \big(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x)\big)\mu(dx) = \lambda_1 \int\limits_X f_1(x)\mu(dx) + \lambda_2 \int\limits_X f_2(x)\mu(dx).$$

(L4) *Sakykime:* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *yra išmatuojamos funkcijos,* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *išmatuojamų funkcijų seka, kuriai* $|f_n(x)| \leqslant g(x)$, $f_n(x) \to f(x)$ *b. v. Jei* g *yra integruojama, tai funkcijos* $f_n(x)$ *ir* $f(x)$ *irgi integruojamos, be to*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

(L5) *Sakykime* $f, f_n : X \to \mathbb{R}$ *yra išmatuojamos funkcijos,* $0 \leqslant f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant \ldots$, $f_n(x) \to f(x)$ *b. v. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

(L6) *Sakykime* $f : X \to \mathbb{R}$ *integruojama funkcija, o aibės* $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, 2, \ldots$, *poromis nesikerta. Tegul* $A = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. *Tada*

$$\int\limits_A f(x)\mu(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{A_i} f(x)\mu(dx).$$

Toliau keletas pastabų.

I. Iš integralo apibrėžimo ir pateiktų savybių išplaukia, kad f integruojama tada ir tik tada, kai $|f|$ integruojama.

$\triangleright$ Iš tiesų. Jei f integruojama, tai pagal apibrėžimą 2.2.2(4) f^+ ir f^- integruojamos. Vadinasi, iš savybės (L3) turime, kad integralas

$$\int\limits_X |f(x)|\mu(dx) = \int\limits_X \big(f^+(x) + f^-(x)\big)\mu(dx) = \int\limits_X f^+(x)\mu(dx) + \int\limits_X f^-(x)\mu(dx)$$

yra baigtinis. Taigi $|f|$ yra integruojama funkcija.

Jei $|f|$ yra integruojama, tai iš įverčių

$$f^+(x) \leqslant |f(x)|,$$
$$f^-(x) \leqslant |f(x)|$$

ir savybės (L1) išplaukia, kad $f^+(x)$ ir $f^-(x)$ yra integruojamos funkcijos. Vadinasi, pagal apibrėžimą 2.2.2(4) integralas

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\limits_X f^+(x)\mu(dx) - \int\limits_X f^-(x)\mu(dx)$$

yra baigtinis. Taigi f integruojama. $\triangleleft$

II. Bet kuriai integruojamai funkcijai $f(x)$ egzistuoja paprastųjų funkcijų seka

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{I_n} \lambda_{in} 1\!\!1_{A_{i,n}}(x),$$

(čia $I_n \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \infty$) turinti savybes:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{b. v. ,} \quad |f_n(x)| \leqslant |f(x)|.$$

Iš savybės (L4) gauname

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x)\mu(dx) = \int\limits_X f(x)\mu(dx).$$

Vadinasi, norint įrodyti kokią nors naują integralo savybę pakanka tą padaryti paprastosioms funkcijoms, o po to pereiti prie ribos pagal paprastųjų funkcijų sekas.

III. Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ išmatuojama erdvė, $f : X \to \mathbb{R}$ neneigiama integruojama funkcija. Visoms $A \in \mathcal{A}$ galima apskaičiuoti

$$\mu_f(A) = \int\limits_A f(x)\mu(dx).$$

Iš Lebego integralo savybių (L1) ir (L6) išplaukia, kad μ_f yra baigtinis matas, t. y. erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu_f)$ yra baigtinė išmatuojama erdvė. Be to, jei $\mu(A) = 0$, tai $1\!\!1_A(x)f(x) = 0$ b. v. Vadinasi, pagal (L2), $\mu_f(A) = 0$. Taigi matas μ_f pasižymi savybe:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu_f(A) = 0.$$

Vadinasi, kiekviena integruojama neneigiama funkcija apibrėžia baigtinį matą, turintį užrašytąją savybę. Pasirodo yra ir atvirkščiai – iš mato turinčio užrašytą savybę galima atkurti integruojamą funkciją.

2.2.2 TEOREMA (Radono–Nikodimo). *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ yra išmatuojama erdvė, ν – kitas, baigtinis matas, turintis savybę: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. Tada egzistuoja neneigiama integruojama funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, kuriai*

$$\nu(A) = \int\limits_A f(x)\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Pastebėsime, kad funkcija $f(x)$ teoremoje randama tam tikra prasme vienareikšmiškai.

▷ Sakykime egzistuoja dvi funkcijos $f_1 : X \to \mathbb{R}$, $f_2 : X \to \mathbb{R}$, kurioms

$$\nu(A) = \int\limits_A f_1(x)\mu(dx), \qquad \nu(A) = \int\limits_X f_2(x)\mu(dx).$$

Vadinasi, bet kuriai $A \in \mathcal{A}$

$$\int\limits_A (f_1(x) - f_2(x))\mu(dx) = 0.$$

Pasirinkime

$$A_1 = \{x:\ f_1(x) > f_2(x)\}, \qquad A_2 = \{x:\ f_1(x) \leqslant f_2(x)\}.$$

Tada

$$0 = \int\limits_{A_1} \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\mu(dx) - \int\limits_{A_2} \big(f_1(x) - f_2(x)\big)\mu(dx)$$
$$= \int\limits_{A_1 \cup A_2} \big|f_1(x) - f_2(x)\big|\mu(dx) = \int\limits_{X} \big|f_1(x) - f_2(x)\big|\mu(dx).$$

Iš integralo savybės (L2) išplaukia, kad $f_1(x) = f_2(x)$ b. v. Taigi gavome, kad funkcijos $f_1(x)$ ir $f_2(x)$ gali skirtis tik aibėje turinčioje nulinį matą.

$\triangleleft$

Nagrinėdami funkcijos pavidalą Radono–Nikodimo teoremoje įrodėme tokį teiginį.

2.2.3 TEOREMA. *Jei f_1 ir f_2 integruojamos funkcijos ir visoms $A \in \mathcal{A}$*

$$\int\limits_A f_1(x)\mu(dx) = \int\limits_A f_2(x)\mu(dx),$$

tai $f_1(x) = f_2(x)$ b. v.

2.3 Erdvė L^p

2.3.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, p – realus skaičius, $1 \leqslant p < \infty$. Aibė visų išmatuojamų funkcijų $f : X \to \mathbb{R}$, kurioms*

$$\int\limits_X |f(x)|^p \mu(dx) < \infty$$

vadinamas $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ erdve.

Dažnai vietoje $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ rašysime tiesiog L^p, jeigu išmatuojama erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aiški iš konteksto. Jei $p = 1$, tai erdvė $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ yra tiesiog integruojamų funkcijų erdvė.

Bet kuriam elementui $f \in L^p$ dydis

$$\|f\|_{L^p} = \Big(\int\limits_X |f(x)|^p \mu(dx)\Big)^{1/p}$$

vadinamas elemento f L^p-norma.

Erdvės L^p norma turi įprastas normos savybes:

(a) $\|f\|_{L^p} = 0 \ \Leftrightarrow\ f(x) = 0$ b. v. ,

(b) $\|\alpha f\|_{L^p} = |\alpha|\|f\|_{L^p}$ visiems $f \in L^p$ ir visoms $\alpha \in \mathbb{R}$,

(c) $\|f + g\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ visoms $f, g \in L^p$.

Aišku, kad bet kurioms $f, g \in L^p$ ir bet kuriam realiam α, αf ir $f+g$ priklauso erdvei L^p. Tuo tarpu $f \cdot g$ nebūtinai priklauso L^p. Tai galima pastebėti iš pavyzdžio. Būtent: $f(x) = x^{-1/2} \in L^1([0,1], \mathcal{B}, m)$, tačiau $f^2(x) = x^{-1} \notin L^1([0,1], \mathcal{B}, m)$. Jei f ir g dvi funkcijos iš erdvės L^p, dydis

$$\|f-g\|_{L^p} = \Big(\int\limits_X \big|f(x)-g(x)\big|^p \mu(dx)\Big)^{1/p}$$

vadinamas L^p atstumu tarp f ir g.

<u>2.3.2 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė. Erdvė $L^{p'}(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinama jungtine ervdei $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, jeigu $1/p + 1/p' = 1$.*

Jeigu $p = 1$, paskutinis apibrėžimas neturi prasmės. Erdvei L^1 jungtinė erdvė sudaryta iš visų išmatuojamų, beveik visur aprėžtų funkcijų. Ši funkcijų aibė žymima L^∞. Jeigu $g \in L^\infty$, tai laikome

$$\|g\|_{L^\infty} = \{\text{mažiausia konstanta } c: \ |g(x)| \leqslant c \ b.\ v.\ \}.$$

Jeigu $f \in L^p$, o $g \in L^{p'}$ tada $f \cdot g$ yra integruojama funkcija, o dydis

$$< f, g >= \int\limits_X f(x) g(x) \mu(dx)$$

vadinamas f ir g skaliarine sandauga. Šiai sandaugai teisinga Koši–Helderio nelygybė:

$$| < f, g > | \leqslant \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^{p'}}.$$

Paskutinė nelygybė teisinga ir tuo atveju, kai $f \in L^1$, o $g \in L^\infty$.

Vietoje normos $\|f\|_{L^1}$ ateityje rašysime tiesiog $\|f\|$. Pastebime, kad ši L^1 norma vietoje trikampio nelygybės dažnai tenkina lygybę. Būtent

$$\|f+g\| = \|f\| + \|g\|, \qquad \text{jei } f \geqslant 0, g \geqslant 0, f, g \in L^1.$$

2.4 Išmatuojamų erdvių sandauga

<u>2.4.1 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $A_1, A_2, \ldots, A_l$, bet kokios aibės. Aibių $A_1, A_2, \ldots, A_l$ Dekarto sandauga vadiname aibę*

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_l = \{(x_1, x_2, \ldots, x_l): \ x_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots, l\}.$$

Sakykime turime l išmatuojamų erdvių $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2), \ldots, (X_l, \mathcal{A}_l, \mu_l)$. Galima apibrėžti:

$$X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_l; \tag{1}$$

$\mathcal{A}$ – mažiausia σ-algebra į kurios sudėtį įeina visos aibės

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_l, \quad A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2, \ldots, A_l \in \mathcal{A}_l; \tag{2}$$

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_l) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\ldots\mu_l(A_l), \tag{3}$$

jei $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, 2, \dots, l$.

Lygybės (1), (2), (3) deja neapibrėžia naujos išmatuojamos erdvės, nes μ apibrėžtas tik specialios struktūros aibėms, kurios nesudaro σ-algebros. Tačiau funkciją μ, nusakytą (3) lygybe, galima pratęsti iki mato, apibrėžto visose σ-algebros $\mathcal{A}$ aibėse.

2.4.1 TEOREMA. *Sakykime $(X_i, \mathcal{A}_i.\mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, yra išmatuojamos erdvės, X, $\mathcal{A}$ ir μ apibrėžti lygybėmis (1), (2), (3). Egzistuoja vienintelis funkcijos μ praplėtimas iki mato μ apibrėžto σ-algebroje $\mathcal{A}$.*

Išmatuojamoji erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$, kurios egzistavimą garantuoja paskutinė teorema, vadinama išmatuojamų erdvių $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, l$, Dekarto sandauga, o matas μ vadinamas matų $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l$ Dekarto sandauga.

Iš (3) lygybės nesunku pastebėti, kad

$$\mu(X_1 \times X_2 \times \dots X_l) = \mu_1(X_1)\mu_2(X_2)\dots\mu_l(X_l).$$

Vadinasi, jei išmatuojamos erdvės $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ yra baigtinės arba tikimybinės, tai tokia yra ir šių erdvių Dekarto sandauga

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = \bigtimes_{i=1}^{l} (X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i).$$

Kadangi išmatuojamų erdvių Dekarto sandauga $X = \bigtimes_{i=1}^{l} (X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ vėlgi yra išmatuojama erdvė, joje egzistuoja Lebego integralas. Sakykime $f : X \to \mathbb{R}$. Šios išmatuojamos funkcijos integralą žymėsime

$$\int\limits_X f(x)\mu(dx) = \int\int\limits_{X_1 \times X_2 \times \dots \times X_l}\dots\int f(x_1, x_2, \dots, x_l)\mu(dx_1, dx_2, \dots, dx_l).$$

Egzistuoja ryšys tarp integralo išmatuojamų erdvių Dekarto sandaugoje ir tos pačios funkcijos integralų atskiruose daugikliuose.

2.4.2 TEOREMA (Fubini). *Sakykime $(X\mathcal{A}, \mu) = (X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1) \times (X_1, \mathcal{A}_2, \mu_2)$, $f : X \to \mathbb{R}$ yra integruojama μ atžvilgiu. Sakykime beveik visiems x_1 funkcija $f(x_1, x_2)$ yra integruojama μ_2 atžvilgiu. Tada funkcija*

$$\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2)$$

yra integruojama μ_1 atžvilgiu ir

$$\iint\limits_X f(x_1, x_2)\mu(dx_1, dx_2) = \int\limits_{X_1} \Bigg(\int\limits_{X_2} f(x_1, x_2)\mu_2(dx_2) \Bigg) \mu_1(dx_1).$$

Pakutinę teoremą galima apibendrinti bet kokiam išmatuojamų erdvių skaičiui. Jei $(X, \mathcal{A}, \mu) = \bigtimes_{i=1}^{l} (X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, tai paskutinė lygybė nusakanti ryšį tarp l-mačių ir vienamačių integralų yra tokia:

$$\int\int\limits_{X_1 \times X_2 \times \dots X_l}\dots\int f(x_1, x_2, \dots, x_l)\mu(dx_1, dx_2, \dots, dx_l)$$
$$= \int\limits_{X_1} \Bigg(\dots \int\limits_{X_{l-1}} \Bigg(\int\limits_{X_l} f(x_1, x_2, \dots, x_l)\mu_l(dx_l) \Bigg) \mu_{l-1}(dx_{l-1}) \dots \Bigg) \mu_1(dx_1).$$

l kartų sudauginę išmatuojamą erdvę $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$ gauname naują išmatuojamą erdvę

$$(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l, m^l) = \bigtimes_{i=1}^{l} (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m).$$

σ-algebra $\mathcal{B}^l$ vadinama Borelio σ-algebra erdvėje $\mathbb{R}^l$, o matas m^l vadinamas Borelio matu erdvėje $\mathbb{R}^l$. Aišku, kad $\mathcal{B}^l$ yra mažiausia σ-algebra turinti visus stačiakampius

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_l, b_l], \qquad a_i, b_i \in \mathbb{R}.$$

Taip pat aišku, kad

$$m^l\big([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_l, b_l]\big) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_l - a_l)$$

bet kuriam l-mačiui stačiakampiui.

Analogiškai l kartų sudauginę erdves $([0,1], \mathcal{B}, m)$, gauname

$$\big([0,1]^l, \mathcal{B}^l, m^l\big) = \bigtimes_{i=1}^{l} \big([0,1], \mathcal{B}, m\big).$$

Abiem atvejais rodikliai virš Borelio σ-algebros $\mathcal{B}$ ir Borelio mato m paprastai praleidžiami, t. y. rašoma $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}, m)$ vietoje $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}^l, m^l)$ ir $([0,1]^l, \mathcal{B}, m)$ vietoje $([0,1]^l, \mathcal{B}^l, m^l)$.

Nagrinėjant integralą erdvėje $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}, m)$ vietoje $m(dx)$ paprastai rašoma tiesiog dx, t. y. integralas

$$\int\limits_{\mathbb{R}^l} f(x)\, dx$$

suprantamas kaip integralas Borelio mato m atžvilgiu.

Borelio matą, nesvarbu kur apibrėžtą: aibėje $\mathbb{R}$, intervale $[0.1]$, aibėje $\mathbb{R}^l$ ar stačiakampyje $[0,1]^l$, galima praplėsti iki pilno mato. Šis naujas pilnas Borelio matas vadinamas Lebego matu.

2.5 Funkcijų sekų konvergavimas

<u>2.5.1 APIBRĖŽIMAS</u>. *Funkcijų seka $f_n \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, vadinama konverguojančia Čezaro prasme į funkciją $f \in L^p$, jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f_k, g > = < f, g >$$

visoms $g \in L^{p'}$.

<u>2.5.2 APIBRĖŽIMAS</u>. *Funkcijų seka $f_n \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, vadinama silpnai konverguojančia į funkciją $f \in L^p$, jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} < f_n, g > = < f, g >$$

visoms $g \in L^{p'}$.

<u>2.5.3 APIBRĖŽIMAS</u>. *Funkcijų seka $f_n \in L^p$, $1 \leqslant p < \infty$, vadinama stipriai konverguojančia į $f \in L^p$, jeigu*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Iš Koši–Helderio nelygybės

$$| < f_n - f, g > | \leqslant \|f_n - f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}$$

išplaukia:

$$f_n \to f \quad \text{stipriai} \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad \text{silpnai.}$$

Taip pat galima įrodyti, kad

$$f_n \to f \quad \text{silpnai} \quad \Rightarrow \quad f_n \to f \quad \text{Čezaro prasme.}$$

Iš 2.5.2 ir 2.5.3 apibrėžimų matosi, kad, norint nustatyti konvergavimą Čezaro prasme arba silpną konvergavimą, reikia tikrinti skaliarinių sandaugų $< f_k, g >$ elgesį visoms funkcijoms $g \in L^{p'}$. Pasirodo dažnai nagrinėjamų funkcijų g klasę galima susiaurinti.

2.5.4 APIBRĖŽIMAS. *Poaibis $K \subset L^p$ vadinamas tiesiškai tankiu, jei kiekvienam $f \in L^p$ ir kiekvienai $\varepsilon > 0$ egzistuoja $g_1, g_2, \ldots, g_n \in K$ ir realūs skaičiai $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, kuriems*

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \right\|_{L^p} < \varepsilon.$$

2.5.1 TEOREMA. *Sakykime $\|f_n\|_{L^p} < C < \infty$ visiems n, o K tiesiškai tankus poaibis erdvėje $L^{p'}$. Tada $f_n \to f$ silpnai tada ir tik tada, kai $\lim\limits_{n\to\infty} < f_n, g > = < f, g >$ visoms $g \in K$.*

▷ **I.** Sakykime $< f_n - f, g > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ visoms $g \in K$.

Tada bet kuriai tiesinei kombinacijai

$$h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m, \qquad g_i \in K,\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

gauname

$$< f_n - f, h > = \lambda_1 < f_n - f, g_1 > + \lambda_2 < f_n - f, g_2 > + \ldots + \lambda_m < f_n - f, g_m > \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Pasirinkime $g \in L^{p'}$. Kadangi K tiesiškai tankus poaibis erdvėje $L^{p'}$, tai kiekvienam $\varepsilon > 0$ egzistuoja tiesinė kombinacija $h = \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_m g_m,$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $g_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, m$, kuriai

$$\|g - h\|_{L^{p'}} < \varepsilon.$$

Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}
| < f_n - f, g > | &= | < f_n - f, g - h + h > | = | < f_n - f, h > + < f_n - f, g - h > | \\
&\leqslant | < f_n - f, h > | + | < f_n - f, g - h > | \\
&\leqslant | < f_n - f, h > | + \|f_n - f\|_{L^p} \|g - h\|_{L^{p'}} \\
&\leqslant | < f_n - f, h > | + \big(\|f_n\|_{L^p} + \|f\|_{L^p}\big)\varepsilon \leqslant | < f_n - f, h > | + \big(C + \|f\|_{L^p}\big)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} | < f_n - f, g > | \leqslant \lim_{n\to\infty} | < f_n - f, h > | + \varepsilon\big(C + \|f\|_{L^p}\big).$$

Kadangi kiekvienai tiesinei kombinacijai h

$$\lim_{n\to\infty} | < f_n - f, h > | = 0,$$

tai kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} | < f_n - f, g > | \leqslant \varepsilon\big(C + \|f\|_{L^p}\big).$$

Šioje nelygybėje perėję prie ribos, kai $\varepsilon \downarrow 0$, gauname kad

$$< f_n - f, g > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

bet kokiai $g \in L^{p'}$. Vadinasi $f_n \to f$ silpnai.

II. Atvirkščiai, tegul $f_n \to f$ silpnai. Tada

$$< f_n - f.g > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

visoms $g \in L^{p'}$. Tuo labiau paskutinis sąryšis teisingas visoms $g \in K \subset L^{p'}$. $\triangleleft$

Erdvėje $L^p([0,1])$, kai $1 \leqslant p < \infty$ tiesiškai tankūs yra tokie poaibiai:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{\text{Aibė funkcijų } \mathbb{I}_\Delta(x), \text{ kur } \Delta \text{ yra intervalai}\},\\ K_2 &= \{\text{Aibė tolydždių funkcijų intervale } [0,1]\},\\ K_3 &= \{\text{Aibė funkcijų } \sin m\pi x,\ m = 0,1,2,\ldots\}. \end{aligned}$$

<u>Pavyzdys</u>. *Sakykime $f_n(x) = \sin nx$. Parodysime, kad $f_n(x) \to 0$ silpnai erdvėje $L^2([0,1], \mathcal{B}, m)$.*

$\triangleright$ Nesunku pastebėti, kad

$$\|f_n\|_{L^2} = \left(\int_0^1 \sin^2 nx\, dx\right)^{1/2} = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sin 2n}{4n}\right|^{1/2} \leqslant 1.$$

Taigi seka $\|f_n\|_{L^2}$ aprėžta.

Pasirinkime bet kokią funkciją $g(x) = \sin m\pi x$ iš tiesiškai tankaus erdvės $L^{p'} = L^2$ poaibio K_3. Aišku, kad

$$< f_n, g >= \int_0^1 \sin nx \sin m\pi x\, dx = \frac{\sin(n - m\pi)}{2(n - m\pi)} - \frac{\sin(n + m\pi)}{2(n + m\pi)}.$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} < f_n, g >= 0 =< 0, g >$$

visoms $g \in K_3$.

Pagal 2.5.1 teoremą $f_n \to 0$ silpnai erdvėje $L^2([0,1], \mathcal{B}, m)$. $\triangleleft$

Analogiškas 2.5.1 teoremai tvirtinimas teisingas ir konvergavimui Čezaro prasme.

<u>2.5.2 teorema</u>. *Sakykime $\|f_n\|_{L^p} < C < \infty$ visiems n, o K tiesiškai tankus poaibis erdvėje $L^{p'}$. $f_n \to f$ Čezaro prasme tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f_k, g >=< f, g >$$

visoms $g \in K$.

Šio skyrelio pabaigoje palyginsime normas skirtingoms p reikšmėms.

2.5.3 TEOREMA. *Sakykime $(X,\mathcal{A},\mu)$ baigtinė išmatuojama erdvė. Jei $1\leqslant p_1<p_2\leqslant\infty$, tai*

$$\|f\|_{L^{p_1}}\leqslant C\|f\|_{L^{p_2}}$$

visoms $f\in L^{p_2}$. Konstanta C nelygybėje priklauso nuo p_1,p_2 ir $\mu(X)$.

$\triangleright$ Tegul $f\in L^{p_2}$, tada

$$\int\limits_X |f|^{p_2}\mu(dx)<\infty.$$

Jei $1\leqslant p_1<p_2$, tai $|f|^{p_1}\leqslant 1+|f|^{p_2}$..

Vadinasi,

$$\int\limits_X |f|^{p_1}\mu(dx)\leqslant\mu(X)+\int\limits_X |f|^{p_2}\mu(dx)<\infty.$$

Pažymėsime $g=|f|^{p_1}$. Tada

$$\|f\|^{p_1}_{L^{p_1}}=\int\limits_X |f|^{p_1}\mu(dx)=<1,g>.$$

Tegul $p'=p_2/p_1$, o p jungtinis skaičiui p', t. y. $1/p+1/p'=1$. Iš Koši–Helderio nelygybės gauname

$$<1,g>=|<1,g>|\leqslant\|1\|_{L^p}\|g\|_{L^{p'}}=\Big(\int\limits_X\mu(dx)\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_X|g|^{p'}\mu(dx)\Big)^{1/p'}$$
$$=\Big(\int\limits_X\mu(dx)\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_X|f|^{p_1p'}\mu(dx)\Big)^{1/p'}=\big(\mu(X)\big)^{1/p}\Big(\int\limits_X|f|^{p_2}\mu(dx)\Big)^{p_1/p_2}.$$

Vadinasi,

$$\|f\|^{p_1}_{L^{p_1}}\leqslant\big(\mu(X)\big)^{1/p}\|f\|^{p_1}_{L^{p_2}}.$$

Arba

$$\|f\|_{L^{p_1}}\leqslant\big(\mu(X)\big)^{1/p_1p}\|f\|_{L^{p_2}}.$$

Jeigu $p_2=\infty$, teoremos nelygybė akivaizdi. Taigi, teorema teisinga visiems $1\leqslant p_1<p_2\leqslant\infty$. $\triangleleft$

Iš įrodyto teiginio išplaukia, kad iš stipraus konvergavimo erdvėje L^{p_2} išplaukia stiprus konvergavimas erdvėje L^{p_1}, jei $1\leqslant p_1<p_2$.

Be to, jei seka f_n stipriai konverguoja į f erdvėje $L^p(p\geqslant 1)$ su baigtiniu matu, tai

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_X f_n\mu(dx)=\int\limits_X f\mu(dx).$$

Pakutinė lygybė išplaukia iš įrodytos teoremos, nes

$$\Big|\int\limits_X f_n\mu(dx)-\int\limits_X f\mu(dx)\Big|\leqslant\int\limits_X|f_n-f|\mu(dx)=\|f_n-f\|\leqslant C\|f_n-f\|_{L^p}.$$

Sakykime funkcijų seka f_n stipriai konverguoja į funkciją f erdvėje $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Tada pasirinktam $\varepsilon > 0$, egzistuoja netūralusis $N(\varepsilon)$, kuriam

$$\|f_n - f\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon,$$

kai $n \geqslant N(\varepsilon)$.

Taigi

$$\|f_{n+k} - f\|_{L^p} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

kai $n \geqslant N(\varepsilon)$, $k \geqslant 0$.

Iš dviejų paskutinių nelygybių ir L^p normos savybių gauname:

$$\|f_{n+k} - f_n\|_{L^p} \leqslant \|f_{n+k} - f\|_{L^p} + \|f_n - f\|_{L^p} \leqslant \varepsilon.$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n+k} - f_n\|_{L^p} = 0$$

tolygiai k atžvilgiu.

Sekos tenkinančios paskutinę sąlygą vadinamos Koši sekomis. Parodėme, kad kiekviena stipriai konverguojanti seka yra Koši seka. Pasirodo erdvėje L^p teisingas ir atvirkščias teiginys.

2.5.4 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, o seka funkcijų f_n iš erdvės $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ $(p \geqslant 1)$ yra Koši seka, t. y.*

$$\lim_{n\to\infty} \|f_{n+k} - f_n\|_{L^p} = 0$$

tolygiai visiems $k \geqslant 0$.

Tada egzistuoja $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, kuriai $f_n \to f$ stipriai, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p} = 0.$$

Paskutinėje teoremoje suformuluota erdvės L^p savybė vadinama erdvės L^p pilnumu. Taigi erdvė $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ yra pilna normuota erdvė.

III
MARKOVO, PERONO IR KUPMANO OPERATORIAI

3.1 Markovo operatoriai

3.1.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *yra išmatuojama erdvė. Operatorius* $P : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p \geqslant 1$, *vadinamas tiesiniu jeigu*

$$P\big(a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)\big) = a_1 P f_1(x) + a_2 P f_2(x) \quad b.\ v.$$

bet kurioms $f_1, f_2 \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, *ir bet kokiems realiems skaičiams* a_1, a_2.

3.1.2 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *yra išmatuojama erdvė,* $p \geqslant 1$. *Bet kuris tiesinis atvaizdis* $P : L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *tenkinantis sąlygas:*

(a) $Pf \geqslant 0$ *visoms* $f \geqslant 0, f \in L^p$,

(b) $\|Pf\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ *visoms* $f \geqslant 0, f \in L^p$,

vadinamas Markovo operatoriumi erdvėje $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Apibrėžimo sąlygose f ir Pf erdvės L^p elementai. Šiems elementams sąlyga $f \geqslant 0$ reiškia, kad $f \geqslant 0$ beveik visur. Ateityje nagrinėdami erdvės L^p elementus žodelius „beveik visur“kartais praleisime, kaip savaime suprantamus.

3.1.1 TEOREMA. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *– išmatuojama erdvė,* P *– Markovo operatorius erdvėje* L^p, $f, g \in L^p$. *Teisingos tokios savybės.*

(M1) *Jeigu* $f \geqslant g$ *b. v. , tai* $Pf \geqslant Pg$ *b. v.*

(M2) $(Pf)^+ \leqslant Pf^+$.

(M3) $(Pf)^- \leqslant Pf^-$.

(M4) $|Pf| \leqslant P|f|$.

(M5) $\|Pf\|_{L^p} \leqslant \|f\|_{L^p}$.

$\triangleright$ (M1). Kadangi $f \geqslant g$, tai $f - g \geqslant 0$ b. v. Iš 3.1.2 apibrėžimo gauname $P(f - g) \geqslant 0$. Kadangi P – tiesinis, tai $Pf \geqslant Pg$.

(M2). Iš f^+ apibrėžimo ir Markovo operatoriaus apibrėžimo gauname:

$$(Pf)^+ = \big(P(f^+ - f^-)\big)^+ = (Pf^+ - Pf^-)^+ = \max\{0, Pf^+ - Pf^-\} \leqslant \max\{0, Pf^+\} = Pf^+.$$

(M3). Analogiškai:

$$(Pf)^- = \big(P(f^+ - f^-)\big)^- = (Pf^+ - Pf^-)^- = \max\{0, -Pf^+ + Pf^-\} \leqslant \max\{0, Pf^-\} = Pf^-.$$

(M4). Iš įrodytų nelygybių (M2) ir (M3) išplaukia:

$$|Pf| = (Pf)^+ + (Pf)^- \leqslant Pf^+ + Pf^- = P(f^+ + f^-) = P|f|.$$

(M5). Iš įrodytos savybės (M4), integralo savybės (L1) (žr. teoremą 2.2.1) ir 3.1.2 apibrėžimo gauname:

$$\|Pf\|_{L^p} = \Big(\int\limits_X |Pf|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_X (P|f|)^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} = \|P|f|\|_{L^p} = \||f|\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}. \qquad \triangleleft$$

Bet koks operatorius P tenkinantis (M5) savybę paprastai vadinamas sutraukiančiu. Taigi visi Markovo operatoriai sutraukiantys.

3.1.3 APIBRĖŽIMAS. *Funkcijos $g \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, kur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – išmatuojama erdvė, nešėju vadiname aibę*

$$\operatorname{supp} g = \{x :\ g(x) \neq 0\}.$$

Atkreipiame dėmesį, kad erdvės L^p elementams g, supp g apibrėžiama nevienareikšmiškai, nes visi erdvės L^p elementai, kurie skiriasi nulinio mato aibėje, laikomi lygiais. Tačiau aišku, kad visų tų skirtingų nešėjų matai sutampa. Kitaip sakant, visi nešėjai lygūs moduliu nulis. Posakis $A = B$ moduliu nulis reiškia, kad aibės A ir B tegali skirtis nulinio mato aibėje.

3.1.2 TEOREMA. *Sakykime P – Markovo operatorius apibrėžtas erdvėje $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p \geqslant 1$. $\|Pf\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$ tada ir tik tada, kai Pf^+ ir Pf^- nešėjai nesikerta moduliu nulis.*

$\triangleright$ **I.** Sakykim pradžioje $\mu(\sup Pf^+ \cap \operatorname{supp} Pf^-) = 0$, t. y. Pf^+ ir Pf^- nešėjai nesikerta moduliu nulis. Pažymime

$$A = \operatorname{supp} Pf^+, \qquad B = \operatorname{supp} Pf^-.$$

Kadangi $\mu(A \cap B) = 0$, pasinaudoję integralo savybe (L6) (žr. 2.2.1 teoremą), gauname

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{L^p} &= \Big(\int\limits_X |Pf|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_X |Pf^+ - Pf^-|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int\limits_{A\cup B} |Pf^+ - Pf^-|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int\limits_A |Pf^+ - Pf^-|^p\,\mu(dx) + \int\limits_B |Pf^+ - Pf^-|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Iš Markovo operatoriaus apibrėžimo išplaukia, kad aibėje A $Pf^+(x) \geqslant 0$, o $Pf^- = 0$ b. v. Analogiškai aibėje B $Pf^-(x) \geqslant 0$, o $Pf^+(x) = 0$ b. v. Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{L^p} &= \Big(\int\limits_A |Pf^+ + Pf^-|^p\,\mu(dx) + \int\limits_B |Pf^+ + Pf^-|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int\limits_{A\cup B} |P(f^+ + f^-)|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_X \big|P|f|\big|^p\,\mu(dx)\Big)^{1/p} = \|P|f|\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Dar kartą pasinaudoję Markovo operatoriaus apibrėžimu gauname:

$$\|Pf\|_{L^p} = \|P|f|\|_{L^p} = \||f|\|_{L^p} = \|f\|_{L_p}.$$

II. Tegul dabar $\|Pf\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}$. Sakykime kaip ir pirmoje įrodymo dalyje

$$A = \operatorname{supp} Pf^+, \qquad B = \operatorname{supp} Pf^-.$$

Parodysime, kad $\mu(A \cap B) = 0$.
Sakykime priešingai, $\mu(A \cap B) > 0$.
Iš integralo savybės (L6) (žr. 2.2.1 teoremą) gauname:

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{L^p} &= \Big(\int\limits_X |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p} = \Big(\int\limits_{A\cup B} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p} \\
&= \Big(\int\limits_{A\setminus B} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) + \int\limits_{B\setminus A} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \\
&+ \int\limits_{A\cap B} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p} \\
&< \Big(\int\limits_{A\setminus B} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) + \int\limits_{B\setminus A} |Pf^+(x) - Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Aibėje $A \setminus B$ $Pf^-(x) = 0$ b. v. Aibėje $B \setminus A$ $Pf^+(x) = 0$ b. v.
Vadinasi,

$$\begin{aligned}
\|Pf\|_{L^p} &< \Big(\int\limits_{A\setminus B} |Pf^+(x) + Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) + \int\limits_{B\setminus A} |Pf^+(x) + Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p} \\
&\leqslant \Big(\int\limits_X |Pf^+(x) + Pf^-(x)|^p \, \mu(dx) \Big)^{1/p} = \|P|f|\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Taigi gavome $\|Pf\|_{L^p} < \|f\|_{L^p}$. Šis prieštaravimas sąlygai rodo, kad $\mu(A \cap B) = 0$. Teorema įrodyta.

◁

<u>3.1.4 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime P - Markovo operatorius apibrėžtas erdvėje $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$, $p \geqslant 1$. Funkcija $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinama nejudamu operatoriaus P tašku, jeigu $Pf = f$.*

<u>3.1.3 TEOREMA</u>. *Jei $f \in L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ yra nejudamas Markovo operatoriaus P taškas, tai $Pf^+ = f^+$ ir $Pf^- = f^-$.*

▷ Kadangi $Pf = f$, tai iš Markovo operatoriaus savybių (M1) ir (M2) (žr. 3.1.1 teoremą) išplaukia:

$$\begin{aligned} f^+ = (Pf)^+ \leqslant Pf^+ \\ f^- = (Pf)^- \leqslant Pf^-. \end{aligned} \tag{1}$$

Antra vertus, pasinaudoję integralo savybe (L3) (žr. 2.2.1 teoremą) gauname:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_X \big(Pf^+(x) - f^+(x)\big) \, \mu(dx) + \int\limits_X \big(Pf^-(x) - f^-(x)\big) \, \mu(dx) \\
&= \int\limits_X \big(Pf^+(x) + Pf^-(x)\big) \, \mu(dx) - \int\limits_X \big(f^+(x) + f^-(x)\big) \, \mu(dx) \\
&= \int\limits_X P|f(x)| \, \mu(dx) - \int\limits_X |f(x)| \, \mu(dx) = \int\limits_X \big(P|f(x)| - |f(x)|\big) \, \mu(dx).
\end{aligned}$$

Kadangi $P|f(x)| \leqslant |f(x)|$ b. v. (žr. savybę (M4) iš 3.1.1 teoremos), tai

$$\int\limits_X \big(Pf^+(x) - f^+(x)\big)\,\mu(dx) + \int\limits_X \big(Pf^-(x) - f^-(x)\big)\,\mu(dx) \leqslant 0.$$

Atkreipę dėmesį į nelygybes (1), gauname:

$$\int\limits_X \big(Pf^+(x) - f^+(x)\big)\,\mu(dx) = 0,$$

$$\int\limits_X \big(Pf^-(x) - f^-(x)\big)\,\mu(dx) = 0.$$

Iš paskutinių lygybių, nelygybių (1) ir integralo savybės (L2) (žr. 2.2.1 teoremą) išplaukia, kad

$$Pf^+(x) = f^+(x) \quad \text{b. v. ir} \quad Pf^-(x) = f^-(x) \quad \text{b. v.}$$ ◁

3.1.5 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ išmatuojama erdvė. Funkcija tenkinanti sąlygas: $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geqslant 0$, $\|f\| = 1$, vadinama tankio funkcija arba tiesiog tankiu. Visų tankių aibę žymėsime $\mathcal{D}(X, \mathcal{A}, \mu)$.*

3.1.6 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $f \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}, \mu)$. Tikimybinis matas apibrėžtas lygybe*

$$\mu_f(A) = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx), \qquad A \in \mathcal{A}$$

vadinamas absoliučiai tolydžiu μ atžvilgiu, o funkcija $f(x)$, tenkinanti paskutinę lygybę, vadinama mato μ_f tankiu.

Iš Radono-Nikodimo teoremos (žr. 2.2.2 teoremą) išplaukia, kad tikimybinis matas ν yra absoliučiai tolydus μ atžvilgiu, jeigu tenkinama sąlyga: $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

3.1.7 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - išmatuojama erdvė, P - Markovo operatorius apibrėžtas erdvėje $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Tankis $f \in \mathcal{D}(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinamas stacionariu operatoriaus P tankiu, jeigu $Pf = f$.*

Kitaip sakant, stacionarus tankis, tai nejudamas Markovo operatoriaus P, apibrėžto erdvėje $L(X, \mathcal{A}, \mu)$, tankis.

3.2 Perono operatoriai

Šiame skyrelyje nagrinėsime Markovo operatorių poaibį susijusį su dinamine sistema $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$.

3.2.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ išmatuojama erdvė. Transformacija $S : X \to X$ vadinama išmatuojama, jeigu*

$$S^{-1}(A) \in \mathcal{A} \quad \textit{visoms} \quad A \in \mathcal{A}.$$

<u>3.2.2 APIBRĖŽIMAS</u>. *Išmatuojamos erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ išmatuojama transformacija S vadinama nesinguliaria, jeigu $\mu(S^{-1}(A)) = 0$ visoms $A \in \mathcal{A}$, kurioms $\mu(A) = 0$.*

<u>3.2.3 APIBRĖŽIMAS</u>. *Ketvertas $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$, kur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ išmatuojama erdvė, o $S : X \to X$ nesinguliari šios erdvės transformacija vadinama dinamine sistema.*

<u>3.2.4 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema. Operatorius $P : L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinamas Perono operatoriumi atitinkančiu transformaciją S, jeigu tenkinamos sąlygos:*

(a) *bet kuriai $f \in L^1$, $f \geqslant 0$ lygybė*

$$\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx)$$

teisinga visoms $A \in \mathcal{A}$;

(b) *bet kuriai $f \in L^1$*

$$Pf = Pf^+ - Pf^-.$$

I. Kadangi $S^{-1}\big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\big) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S^{-1}(A_i)$ ir $S : X \to X$ išmatuojama, tai iš integralo savybės (L6) (žr. 2.2.1 teoremą) išplaukia, kad lygybė

$$\nu_f(A) = \int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx), \qquad A \in \mathcal{A}$$

apibrėžia matą erdvėje $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Be to transformacija S yra nesinguliari, todėl matas $\nu_f(A)$ tenkina sąlygą:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu_f(A) = 0.$$

Vadinasi, iš Radono-Nikodimo teoremos (žr. 2.2.2 teoremą) išplaukia integruojamos funkcijos $Pf(x)$, tenkinančios 3.2.4 apibrėžimo (a) dalį, egzistavimas.

II. Iš 3.2.4 apibrėžimo ir integralo savybės (L3) (žr. 2.2.1 teoremą) išplaukia, kad bet kuriai aibei $A \in \mathcal{A}$ ir bet kuriai funkcijai $f \in L^1$

$$\begin{aligned}\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx) &= \int\limits_A \big(Pf^+(x) - Pf^-(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_A Pf^+(x)\,\mu(dx) - \int\limits_A Pf^-(x)\,\mu(dx)\\ &= \int\limits_{S^{-1}(A)} f^+(x)\,\mu(dx) - \int\limits_{S^{-1}(A)} f^-(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-1}(A)} \big(f^+(x) - f^-(x)\big)\,\mu(dx)\\ &= \int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

III. Antra vertus, jeigu bet kuriai funkcijai $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ir $A \in \mathcal{A}$

$$\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx),$$

tai bet kuriai $A \in \mathcal{A}$ gauname

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} \big(f^+(x) - f^-(x)\big)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f^+(x)\,\mu(dx) - \int_{S^{-1}(A)} f^-(x)\,\mu(dx)$$

$$= \int_A Pf^+(x)\,\mu(dx) - \int_A Pf^-(x)\,\mu(dx) = \int_A \big(Pf^+(x) - Pf^-(x)\big)\,\mu(dx).$$

Vadinasi, pagal 2.2.3 teoremą

$$Pf = Pf^+ - Pf^- \quad \text{b. v.}$$

Atsižvelgiant į paskutines dvi pastabas, Perono operatorių galima apibrėžti trumpiau.

3.2.4(B) APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema. Operatorius $P : L^1(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vadinamas Perono operatoriumi atitinkančiu transformaciją S, jeigu visoms funkcijoms $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ir visoms $A \in \mathcal{A}$ galioja lygybė*

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx).$$

3.2.1 TEOREMA. *Sakykime P yra Perono operatorius atitinkantis dinaminės sistemos $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ transformaciją S. Tada teisingi tokie teiginiai:*

(P1) *Visoms $f_1, f_2 \in L^1$ ir visiems $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$*

$$P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 Pf_1 + \lambda_2 Pf_2.$$

(P2) *Jei $f \geqslant 0$, tai $Pf \geqslant 0$.*

(P3) $\displaystyle\int_X Pf(x)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu(dx).$

(P4) *Jei $S_n = S \circ S \circ \ldots \circ S$ yra n-tasis transformacijos laipsnis, o P_n ją atitinkantis Perono operatorius, tai $P_n = P^n$.*

▷ **I.** Iš 3.2.4(B) apibrėžimo ir integralo savybės (L3) (žr. 2.2.1 teoremą) bet kuriai aibei $A \in \mathcal{A}$ gauname

$$\int_A P(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\,\mu(dx)$$

$$= \lambda_1 \int_{S^{-1}(A)} f_1\,\mu(dx) + \lambda_2 \int_{S^{-1}(A)} f_2\,\mu(dx)$$

$$= \lambda_1 \int_A Pf_1\,\mu(dx) + \lambda_2 \int_A Pf_2\,\mu(dx) = \int_A \big(\lambda_1 Pf_1 + \lambda_2 Pf_2\big)\,\mu(dx).$$

Iš gautos lygybės ir 2.2.3 teoremos išplaukia (P1) savybė.

II. Iš Perono operatoriaus apibrėžimo, visoms $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\mu(dx).$$

Kadangi $f(x) \geqslant 0$ b. v. , tai visoms $A \in \mathcal{A}$ pagal integralo savybę (L1)

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) \geqslant 0.$$

Sakykime kažkokiai $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) > 0$ ir kažkokiam $\varepsilon > 0$ $Pf(x) \leqslant -\varepsilon$ visiems $x \in B$. Tada $P(-f(x))\mathbb{1}_B(x) \geqslant \varepsilon \mathbb{1}_B(x)$. Iš integralo savybės (L1) (žr. 2.2.1 teoremą) gauname

$$\int_B Pf(x)\,\mu(dx) \leqslant -\varepsilon\mu(B) < 0.$$

Gautasis prieštaravimas rodo, kad $Pf(x) \geqslant 0$ b. v. Taigi savybė (P2) teisinga.

III. Lygybėje apibrėžiančioje Perono operatorių (žr. 3.2.4(B) apibrėžimą) paėmę $A = X \in \mathcal{A}$, gauname

$$\int_X Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(X)} f(x)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

Taigi savybė (P3) teisinga.

IV. Kadangi transformaciją S_n atitinka operatorius P_n, tai

$$\int_A P_n f(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-n}(A)} f(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Antra vertus, iš Perono operatoriaus apibrėžimo, bet kuriai $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\int_{S^{-n}(A)} f(x)\,\mu(dx) &= \int_{S^{-1}(S^{-(n-1)}(A))} f(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-(n-1)}(A)} Pf(x)\,\mu(dx)\\ &= \int_{S^{-1}(S^{-(n-2)}(A))} Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-(n-2)}(A)} P^2 f(x)\,\mu(dx) = \ldots = \int_A P^n f(x)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

Vadinasi, visoms $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A P_n f(x)\,\mu(dx) = \int P^n f(x)\,\mu(dx).$$

Pritaikius 2.2.3 teoremą iš paskutinės lygybės išplaukia savybė (P4). $\triangleleft$

Iš teoremoje įrodytų savybių aišku, kad Perono operatorius P dinaminėje sistemoje $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ yra kartu ir Markovo operatorius erdvėje $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Sekantis tvirtinimas apibūdina kaip Perono operatorius keičia neneigiamos funkcijos nešėją.

3.2.2 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema, P - Perono operatorius atitinkantis transformaciją S, $f \in L^1$, $f \geqslant 0$. Tada teisingi tokie sąryšiai:*

(a) $\operatorname{supp} f \subset S^{-1}(\operatorname{supp} Pf)$,

(b) $Pf(x) = 0$ *aibėje* $A \Leftrightarrow f(x) = 0$ *aibėje* $S^{-1}(A)$.

▷ **I.** Iš Perono operatoriaus apibrėžimo

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Arba

$$\int_X \mathbb{I}_A(x) Pf(x)\,\mu(dx) = \int_X \mathbb{I}_{S^{-1}(A)}(x) f(x)\,\mu(dx), \qquad A \in \mathcal{A}.$$

Jei $Pf(x) = 0$ aibėje A iš integralo savybės (L2) (žr. 2.2.1 teoremą) ir paskutinės lygybės gauname $f(x) = 0$ aibėje $S^{-1}(A)$.

Atvirkščiai, jei $f(x) = 0$ aibėje $S^{-1}(A)$, tai iš viršutinės lygybės ir integralo savybės (L2) išplaukia, kad $Pf(x) = 0$ b. v. aibėje A, nes $Pf(x) \geqslant 0$ pagal savybę (P2) (žr. 3.2.1 teoremą).

Įrodėme antrąjį teoremos tvirtinimą.

Sakykime dabar $A = X \setminus \operatorname{supp}(Pf)$. Aišku, kad $Pf(x) = 0$ aibėje A. Iš įrodytos dalies išplaukia, kad $f(x) = 0$ aibėje $S^{-1}(A)$. Vadinasi,

$$\operatorname{supp} f \subset X \setminus S^{-1}(A).$$

Kadangi

$$S^{-1}(A) = S^{-1}(X \setminus \operatorname{supp} Pf) = X \setminus S^{-1}(\operatorname{supp} Pf),$$

tai gauname

$$\operatorname{supp} f \subset X \setminus \big(X \setminus S^{-1}(\operatorname{supp} Pf)\big) = S^{-1}(\operatorname{supp} Pf). \qquad ◁$$

Kai imama nebūtinai neneigiama funkcija $f(x)$ iš erdvės L^1 galima teigti tik tiek

$$f(x) = 0 \quad \text{visiems} \quad S^{-1}(A) \Rightarrow Pf(x) = 0 \quad \text{visiems} \quad x \in A.$$

Atvirkščias teiginys nėra teisingas.

Atskirais atvejais, galime gauti išreikštinę formulę Perono operatoriui rasti. Toliau šiame skyrelyje aptarsime tuos atvejus.

I. Sakykime $X = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = m$. Lygybėje apibrėžiančioje Perono operatorių (žr. 3.2.4(B) apibrėžimą) pasirinkę $A = [a, x]$, gauname

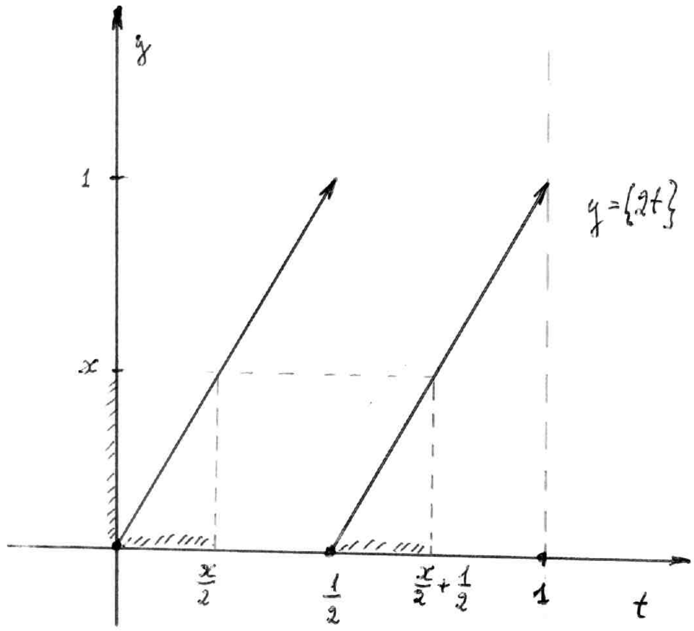
$$\int_a^x Pf(y)\,dy = \int_{S^{-1}([a,x])} f(y)\,dy.$$

Kadangi funkcija $Pf(x) \in L^1([a, b], \mathcal{B}, m)$, tai, pasinaudoję žinoma teorema apie integralo su kintamu viršutiniu rėžiu išvestinę (žr. pavyzdžiui [4]), iš paskutinės lygybės gauname

$$Pf(x) = \Bigg(\int_{S^{-1}([a,x])} f(y)\,dy \Bigg)'_x \quad \text{b. v.} \tag{3.1}$$

3.2.1 pavyzdys. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu) = ([0, 1], \mathcal{B}, m)$, *o transformacija* S *apibrėžta lygybe* $S(x) = 2x \bmod 1 = \{2x\}$. *Rasime Perono operatoriaus išraišką šiuo atveju.*

Iš transformacijos $S(t) = \{2t\}$ grafiko



išplaukia, kad

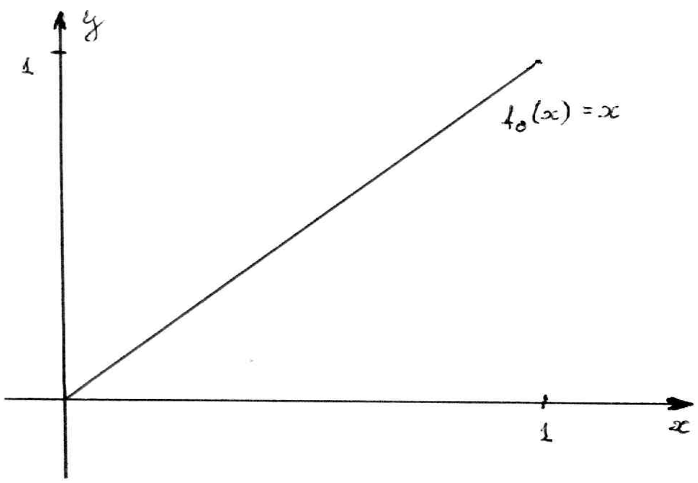
$$S^{-1}([0,x]) = \left[0, \frac{x}{2}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{x}{2}\right].$$

Pagal (3.1) formulę gauname

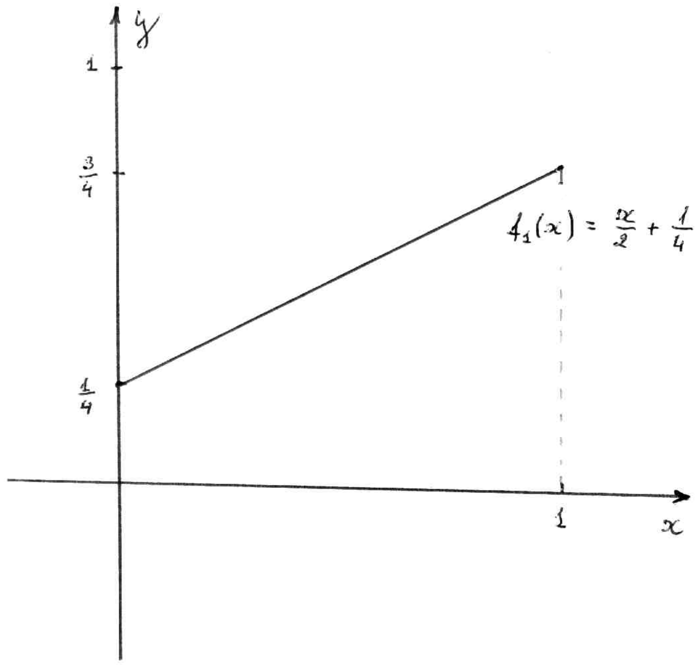
$$Pf(x) = \left(\int\limits_0^{\frac{x}{2}} f(y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} f(y)\,dy \right)'_x = \frac{1}{2}\left(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\Big)\right),$$

bet kokiai integruojamai funkcijai $f \in L^1([0,1], \mathcal{B}, m)$.

Parinkus $f_0(x) = x$

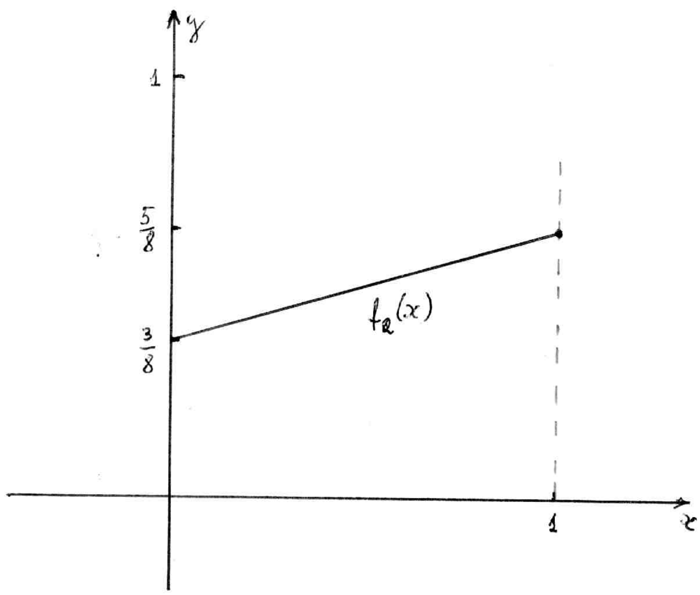


gauname $Pf_0(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = f_1(x)$



Analogiškai

$$P^2 f_0(x) = P(Pf_0(x)) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{1}{2}}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{4} + \frac{3}{8}.$$



Tęsdami procesą gautume, kad

$$P^n f_0(x) = \frac{x}{2^n} + \frac{2^n - 1}{2^{n+1}}$$

bet kuriam natūraliąjam n.

Parinkus

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{jei } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ -1, & \text{jei } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

gauname

$$Pf_1(x) = 0 \quad \text{visiems} \quad x \in [0,1].$$

Šis atvejis rodo, kad bendru atveju:

$$Pf(x) = 0 \quad \text{visiems} \quad x \in A \not\Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{visiems} \quad x \in S^{-1}(A).$$

Iš tiesų $Pf_1(x) = 0$ visiems $x \in [0,1]$, nors $f_1(x) \neq 0$ nė vienam $x \in S^{-1}([0,1]) = [0,1]$.

II. Sakykime $X = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = m$. Pasirinkę $A = [a,x] \times [c,d]$, iš lygybės apibrėžiančios Perono operatorių (žr. 3.2.4(B) apibrėžimą) gauname

$$\int_a^x ds \int_c^y Pf(s,t)\,dt = \iint\limits_{S^{-1}([a,x]\times[b,y])} f(s,t)\,dsdt.$$

Analogiškai, kaip ir vieno kintamojo atveju iš pakutinės lygybės galime išvesti, kad

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \iint\limits_{S^{-1}([a,x]\times[b,y])} f(s,t)\,dsdt \quad \text{b. v.} \tag{3.2}$$

III. Sakykime vėl $X = [a,b]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = m$. Jei transformacija $S : X \to X$ tenkina papildomas sąlygas, Perono operatoriaus išraiška dar paprastesnė. Sakykime S diferencijuojama ir abipus vienareikšmė. Jeigu taip yra, tai S monotoniška. Tegul S didėjanti. Tada $S^{-1}([a,x]) = [S^{-1}(a), S^{-1}(x)]$. Iš (3.1) formulės gauname

$$Pf(x) = \left(\int\limits_{S^{-1}(a)}^{S^{-1}(x)} f(y)\,dy \right)'_x = f\big(S^{-1}(x)\big)\big(S^{-1}(x)\big)'_x, \quad \text{b. v.}$$

Jeigu S mažėjanti, tai gaunama analogiška išraiška, kuri nuo paskutinės skiriasi tik ženklu. Vadinasi dinaminėje sistemoje $([a,b], \mathcal{B}, m, S)$, kai S diferencijuojama ir abipus vienareikšmė

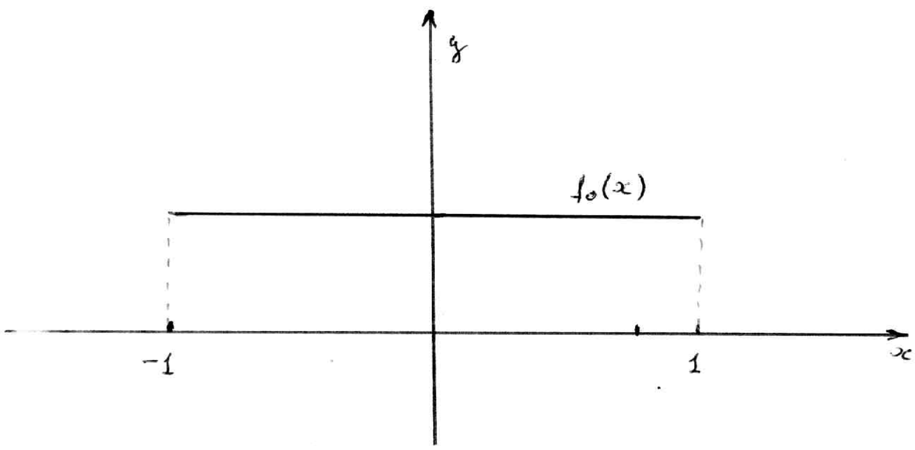
$$Pf(x) = f\big(S^{-1}(x)\big)\Big|\big(S^{-1}(x)\big)'_x\Big| \quad \text{b. v.} \tag{3.3}$$

<u>3.2.2 PAVYZDYS</u>. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}, m)$, *o transformacija* S *apibrėžta lygybe* $S(x) = e^x$.

Pagal (3.3) formulę

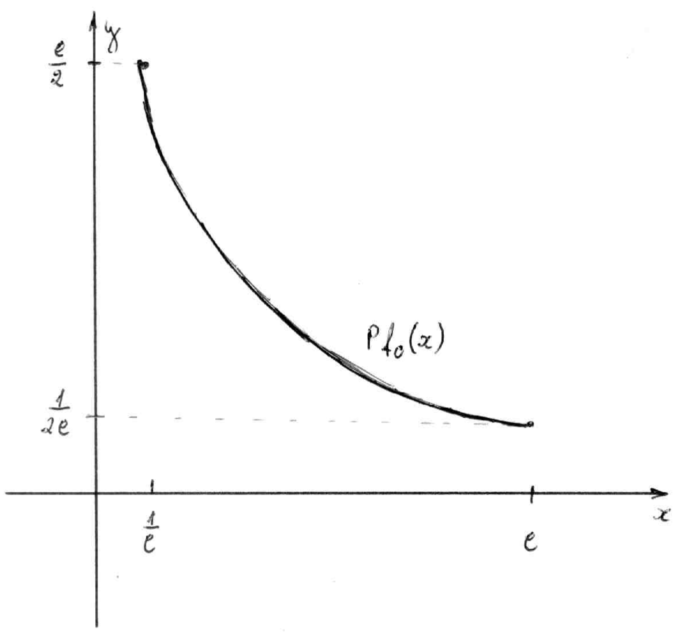
$$Pf(x) = f(\ln x)\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x} f(\ln x).$$

Pasirinkus $f_0(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$



gauname

$$Pf_0(x) = \frac{1}{x}f_0(\ln x) = \frac{1}{2x}\mathbb{1}_{[-1,1]}(\ln x) = \frac{1}{2x}\mathbb{1}_{[e^{-1},e]}(x).$$



Lygybę (3.3) galima apibendrinti. Tą atliksime sekančiose dviejose teoremose.

3.2.3 TEORMA. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ *– dinaminė sistema,* $f \in L^1 \cap L^\infty$ *t. y.* f *aprėžta integruojama funkcija. Tada bet kuriai* $A \in \mathcal{A}$

$$\int\limits_{S^{-1}(A)} f(S(x))\,\mu(dx) = \int\limits_A f(x)\mu S^{-1}(dx) = \int\limits_A f(x)J^{-1}(x)\,\mu(dx),$$

čia μS^{-1} *matas, kuriam*

$$\mu S^{-1}(B) = \mu\big(S^{-1}(B)\big)$$

visoms $B \in \mathcal{A}$*, o* $J^{-1}(x)$ *yra mato* μS^{-1} *tankis* μ *atžvilgiu, t. y.*

$$\mu S^{-1}(B) = \int\limits_B J^{-1}(x)\,\mu(dx)$$

visoms $B \in \mathcal{A}$*.*

Kadangi S nesinguliari, tai pagal Radono–Nikodimo teoremą (žr. 2.2.2 teoremą) tankis $J^{-1}(x)$ paminėtas teoremos formuluotėje egzistuoja.

Kai S yra erdvės $\mathbb{R}^l$ abipus vienareikšmė diferencijuojama transformacija, $J^{-1}(x)$ yra kintamųjų keitimo determinantas. Būtent

$$J^{-1}(x) = \left|\frac{dS^{-1}(x)}{dx}\right|.$$

$\triangleright$ Pradžioje imkime $f(x) = \mathbb{I}_B(x)$, kur $B \in \mathcal{A}$. Tada

$$f(S(x)) = \mathbb{I}_B(S(x)) = \mathbb{I}_{S^{-1}(B)}(x).$$

Vadinasi,

$$\int\limits_{S^{-1}(A)} f(S(x))\,\mu(dx) = \int\limits_X \mathbb{I}_{S^{-1}(A)}(x)\mathbb{I}_{S^{-1}(B)}(x)\,\mu(dx) = \mu\big(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B)\big) = \mu\big(S^{-1}(A \cap B)\big).$$

Analogiškai

$$\int\limits_A f(x)\,\mu S^{-1}(dx) = \int\limits_X \mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B(x)\,\mu S^{-1}(dx) = \mu S^{-1}(A \cap B) = \mu\big(S^{-1}(A \cap B)\big).$$

Pagaliau

$$\int\limits_A f(x)J^{-1}(x)\,\mu(dx) = \int\limits_X \mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B(x)J^{-1}(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{A\cap B} J^{-1}(x)\,\mu(dx)$$
$$= \mu S^{-1}(A \cap B) = \mu\big(S^{-1}(A \cap B)\big).$$

Iš gautųjų lygybių nesunku pastebėti, kad teorema teisinga funkcijoms $\mathbb{I}_B(x)$, $B \in \mathcal{A}$.

Iš Lebego integralo savybės (L3) (žr. 2.2.1 teoremą) išplaukia, kad teoremos tvirtinimas teisingas visoms paprastoioms funkcijos, t. y. funkcijoms turinčioms pavidalą

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \mathbb{I}_{B_i}(x),$$

kur $B_i \in \mathcal{A}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Jei $f(x)$ bet kokia aprėžta integruojama funkcija, tai egzistuoja paprastųjų funkcijų seka $f_n(x)$, kuriai:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{b. v.} \quad \text{ir} \quad |f_n(x)| \leqslant |f(x)|.$$

Kadangi sekos funkcijoms $f_n(x)$ teoremos tvirtinimas teisingas, tai pasinaudojus integralo savybe (L4) gauname, kad teorema teisinga bet kokiai $f \in L^1 \cap L^\infty$.

◁

<u>3.2.4 TEOREMA</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ dinaminė sistema, $S : X \to X$ abipus vienareikšmė nesinguliari transformacija, P – Perono operatorius, atitinkantis transformaciją S. Tada bet kokiai funkcijai $f \in L^1 \cap L^\infty$*

$$Pf(x) = f\big(S^{-1}(x)\big)J^{-1}(x), \tag{3.4}$$

kur $J^{-1}(x)$ kaip ir ankstesnėje teoremoje yra mato μS^{-1} tankis μ atžvilgiu, t. y.

$$\mu\big(S^{-1}(B)\big) = \int_B J^{-1}(x)\,\mu(dx), \qquad B \in \mathcal{A}.$$

▷ Iš Perono operatoriaus apibrėžimo

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Iš 3.2.3 teoremos

$$\int_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f\big(S(S^{-1}(x)\big)\,\mu(dx) = \int_A f\big(S^{-1}(x)\big)J^{-1}(x)\,\mu(dx).$$

Vadinasi,

$$\int_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int_A f\big(S^{-1}(x)\big)J^{-1}(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$. Iš 2.2.3 teoremos išplaukia, kad

$$Pf(x) = f\big(S^{-1}(x)\big)J^{-1}(x) \quad \text{b. v.}$$

◁

3.3 Kupmano operatoriai

<u>3.3.1 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ dinaminė sistema. Operatorius U : $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ tenkinantis lygybę*

$$Uf(x) = f(S(x))$$

vadinamas Kupmano operatoriumi.

Iš transformacijos S nesinguliarumo išplaukia operatoriaus U apibrėžimo korektiškumas. Galima parodyti, kad:

$$f_1(x) = f_2(x) \quad \text{b. v.} \quad \Rightarrow \quad f_1(S(x)) = f_2(S(x)) \quad \text{b. v.}$$

<u>3.3.1 TEOREMA</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ – dinaminė sistema, $U : L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \to$*

$L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ – Kupmano operatorius, atitinkantis transformaciją S, o $P: L^1(X,\mathcal{A},\mu)\to L^1(X,\mathcal{A},\mu)$ – Perono operatorius, atitinkantis transformaciją S. Tada teisingi tokie tvirtinimai:

(K1) *Visoms $f_1,f_2\in L^\infty$ ir visiems $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{R}$*

$$U(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)=\lambda_1 Uf_1+\lambda_2 Uf_2.$$

(K2) *Visoms $f\in L^\infty$*

$$\|Uf\|_{L^\infty}\leqslant\|f\|_{L^\infty}.$$

(K3) *Visoms $f\in L^1$, $g\in L^\infty$*

$$<Pf,g>=<f,Ug>.$$

$\triangleright$ **I.** Nesunku pastebėti, kad

$$U(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(x)=(\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2)(S(x))=\lambda_1 f_1(S(x))+\lambda_2 f_2(S(x))=\lambda_1 U(f_1(x))+\lambda_2 Uf_2(x).$$

Taigi savybė (K1) teisinga.

II. Kadangi

$$\|f\|_{L^\infty}=\inf\{c:\ |f(x)|\leqslant c\ \text{ b. v. }\},$$

tai

$$|f(x)|\leqslant\|f\|_{L^\infty}\quad\text{b. v.}$$

Todėl

$$\big|f(S(x))\big|\leqslant\|f\|_{L^\infty}\quad\text{b. v.}$$

Arba

$$\big|Uf(x)\big|\leqslant\|f\|_{L^\infty}\quad\text{b. v.}$$

Paskutinė nelygybė rodo, kad

$$\|Uf\|_{L^\infty}\leqslant\|f\|_{L^\infty}.$$

III. Sakykime pradžioje $g=\mathbb{1}_A$, $A\in\mathcal{A}$. Tada

$$<Pf,g>=\int\limits_X Pf(x)\mathbb{1}_A(x)\,\mu(dx)=\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx)$$
$$<f,Ug>=\int\limits_X f(x)U\mathbb{1}_A(x)\,\mu(dx)=\int\limits_X f(x)\mathbb{1}_A(S(x))\,\mu(dx)=\int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx).$$

Tačiau

$$\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx)=\int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx)$$

pagal Perono operatoriaus paibrėžimą 3.2.4(B). Vadinasi,

$$<Pf,\mathbb{1}_A>=<f,U\mathbb{1}_A>$$

visoms $f\in L^1$.

Kai g paprasta funkcija, t. y.

$$g = \sum_{i=1}^{m} \lambda_1 \mathbb{I}_{A_i}, \qquad A_i \in \mathcal{A},$$

pasinaudoję įrodyta dalimi ir integralo savybe (L3) iš teoremos 2.2.1, gauname

$$\begin{aligned}
< Pf, g > &= \Big\langle Pf, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{I}_{A_i} \Big\rangle = \int\limits_X Pf(x) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mu(dx) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_X Pf(x) \mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mu(dx) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < Pf, \mathbb{I}_{A_i} >= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i < f, U\mathbb{I}_{A_i} > \\
&= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \int\limits_X f(x) U\mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mu(dx) = \int\limits_X f(x) \sum_{i=1}^{m} \lambda_i U\mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mu(dx) \\
&= \int\limits_X f(x) U \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbb{I}_{A_i}(x)\, \mu(dx) = \int\limits_X f(x) Ug(x)\, \mu(dx) =< f, Ug > .
\end{aligned}$$

Jeigu g bet kokia funkcija iš erdvės L^∞, tai egzistuoja paprastųjų funkcijų seka $g_n(x)$, kuriai:

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x) \quad \text{b. v. ,} \qquad |g_n(x)| \leqslant |g(x)|.$$

Pagal įrodytą dalį

$$< Pf, g_n >=< f, Ug_n >$$

visoms $f \in L^1$ ir visiems n.

Iš Lebego integralo savybės (L4) gauname

$$\begin{aligned}
< Pf, g > &= \int\limits_X Pf(x) g(x)\, \mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_X Pf(x) g_n(x)\, \mu(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} < Pf, g_n >= \lim_{n\to\infty} < f, Ug_n >= \lim_{n\to\infty} \int\limits_X f(x) Ug_n(x)\, \mu(dx) \\
&= \int\limits_X f(x) Ug(x)\, \mu(dx) =< f, Ug >,
\end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}
&\big|Pf(x) g_n(x)\big| \leqslant \big|Pf(x)\big| |g(x)| \leqslant \|g\|_{L^\infty} |Pf(x)| \in L^1, \\
&\big|f(x) Ug_n(x)\big| = \big|f(x) g_n(S(x))\big| \leqslant |f(x)| \big|g(S(x))\big| \leqslant \|g\|_{L^\infty} |f(x)| \in L^1
\end{aligned}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} Ug_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(S(x)) = g(S(x)) = Ug(x) \quad \text{b. v.}$$

Taigi savybė (K3) teisinga visoms funkcijoms $f \in L^1$ ir $g \in L^\infty$. $\triangleleft$

Naudojant Kupmano operatoriaus savybes galima gauti ryšį tarp sekų f_n silpno konvergavimo ir Pf_n silpno konvergavimo. Apie tai sekantis tvirtinimas.

3.3.2 TEOREMA. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ *– dinaminė sistema, o* P *– Perono operatorius atitinkantis transformaciją* S*. Jei seka* $f_n \in L^1$ *silpnai konverguoja į* $f \in L^1$*, tai* Pf_n *silpnai konverguoja į* Pf*.*

$\triangleright$ Sakykime $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ silpnai. Iš 2.5.2 apibrėžimo

$$< f_n, g > \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} < f, g >$$

visoms $g \in L^\infty$.

Iš šio sąryšio ir savybės (K3) bet kuriai funkcijai $g \in L^\infty$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} < Pf_n, g >= \lim_{n\to\infty} < f_n, Ug >=< f, Ug >=< Pf, g > .$$

Pagal minėtą 2.5.2 apibrėžimą $Pf_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} Pf$ silpnai. $\triangleleft$

IV
DINAMINIŲ SISTEMŲ TRANSFORMACIJŲ RŪŠYS

4.1
Matą išsaugančios transformacijos

4.1.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ – *dinaminė sistema. S vadinama išsaugančia matą, jeigu*

$$\mu\big(S^{-1}(A)\big) = \mu(A)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Paskutinė lygybė priklauso nuo S ir nuo μ. S vadinama išsaugančia matą μ, o μ vadinamas invariantiniu S atžvilgiu. Bet kuri matą išsauganti transformacija yra nesinguliari. Iš tiesų jei $\mu(A) = 0$, tai iš užrašytos lygybės išplaukia $\mu\big(S^{-1}(A)\big) = 0$.

Sekanti teorema rodo, kaip pasinaudojant Perono operatoriumi galima nesunkiai nustatyti ar transformacija S išsaugo matą.

4.1.1 TEOREMA. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ – *dinaminė sistema,* P – *Perono operatorius atitinkantis transformaciją* S. *Tegul be to* $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geqslant 0$,

$$\mu_f(A) = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx).$$

Matas μ_f *yra invariantinis* S *atžvilgiu tada ir tik tada kai* f *yra nejudantis operatoriaus* P *taškas.*

▷ Sakykime matas μ_f invariantinis S atžvilgiu. Iš apibrėžimo

$$\mu_f(A) = \mu_f\big(S^{-1}(A)\big)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Vadinasi,

$$\int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Iš Perono operatoriaus apibėžimo (žr. 3.2.4 apibrėžimą)

$$\int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Iš dviejų paskutinių lygybių gauname, kad

$$\int\limits_A f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Pagal 2.2.3 teoremą $Pf = f$ b. v. Taigi f yra nejudamas operatoriaus P taškas.

Sakykime dabar, kad f nejudantis P taškas. Tada $Pf = f$ b. v. Iš Perono operatoriaus apibrėžimo

$$\int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Kadangi $Pf = f$ b. v. , tai

$$\int\limits_A Pf(x)\,\mu(dx) = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx)$$

visoms $A \in \mathcal{A}$.

Vadinasi,

$$\int\limits_{S^{-1}(A)} f(x)\,\mu(dx) = \int\limits_A f(x)\,\mu(dx)$$

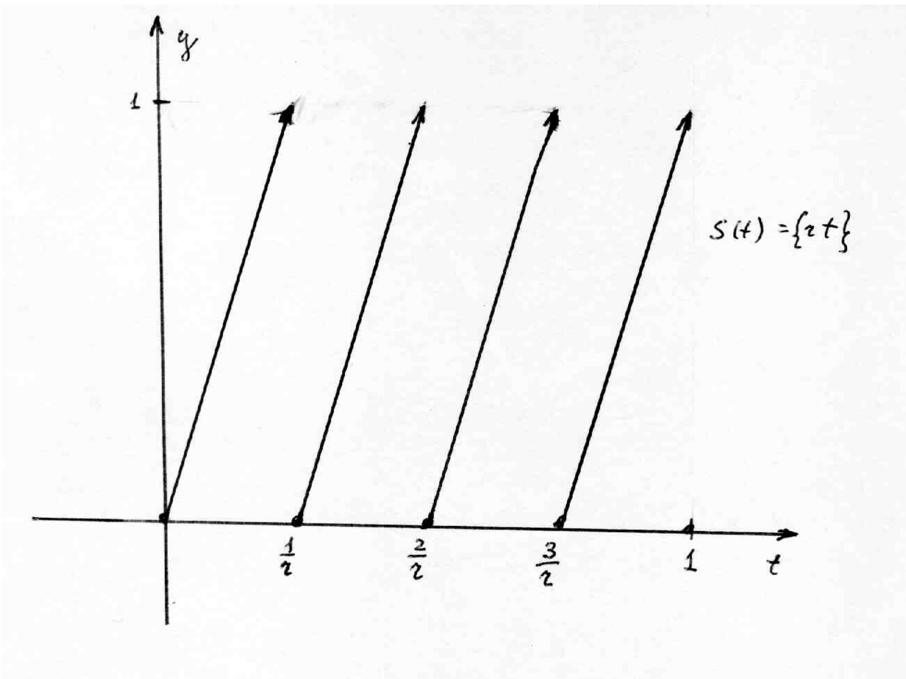
visoms $A \in \mathcal{A}$. Arba $\mu_f\big(S^{-1}(A)\big) = \mu_f(A)$, kai $A \in \mathcal{A}$. Taigi μ_f yra invariantinis S atžvilgiu.

◁

4.1.1. IŠVADA. *Dinaminės sistemos $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ transformacija S išsaugo matą μ tada ir tik tada, kai $P\mathbb{1} = \mathbb{1}$ b. v.*

4.1.1 PAVYZDYS. *Nustatysime ar dinaminės sistemos $\big([0,1], \mathcal{B}, m, S\big)$ transformacija $S(x) = rx(\text{mod } 1) = \{rx\}$ išsaugo Lebego matą m. Čia $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$ fiksuotas skaičius.*

▷ Pradžioje rasime Perono operatorių transformacijai $S(t) = \{rt\}$:



Iš (3.1) lygybės turime

$$Pf(x) = \Bigg(\int\limits_{S^{-1}([0,x])} f(y)\, dy \Bigg)'_x \quad \text{b. v.}$$

Kadangi

$$S^{-1}\big([0,x]\big) = \Big[0, \frac{x}{r}\Big] \cup \Big[\frac{1}{r}, \frac{1}{r} + \frac{x}{r}\Big] \cup \ldots \cup \Big[\frac{r-1}{r}, \frac{r-1}{r} + \frac{x}{r}\Big] = \bigcup_{i=0}^{r-1} \Big[\frac{i}{r}, \frac{i}{r} + \frac{x}{r}\Big]$$

visiems $x \in [0,1]$, tai

$$Pf(x) = \Bigg(\sum_{i=0}^{r-1} \int\limits_{\frac{i}{r}}^{\frac{i}{r}+x/r} f(y)\, dy \Bigg)'_x = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} f\Big(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\Big) \quad \text{b. v.}$$

Vadinasi, visiems $x \in [0,1]$

$$P\mathbb{1}(x) = \frac{1}{r} \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{1}\Big(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\Big) = \frac{r}{r} = 1.$$

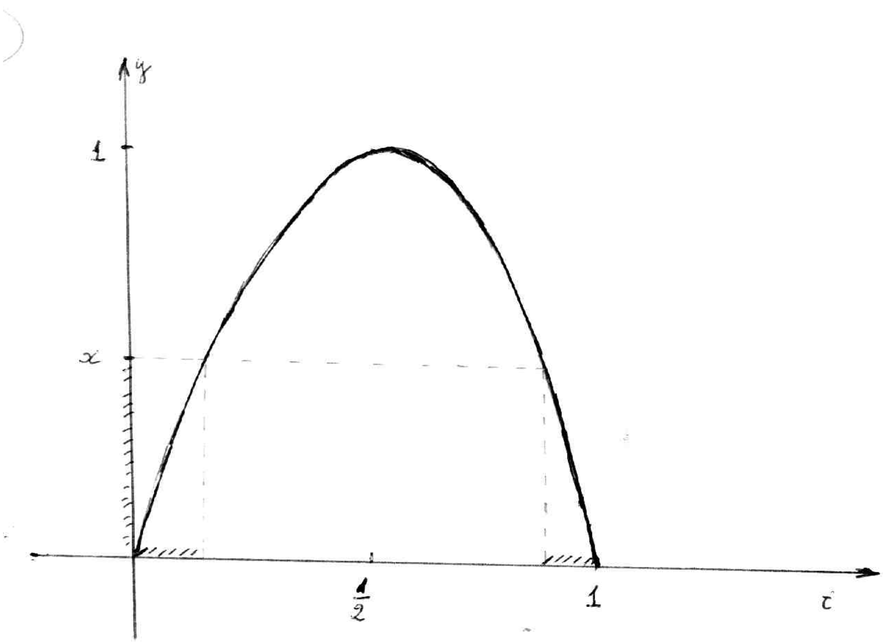
Kadangi $P\mathbb{1}(x) = \mathbb{1}(x)$, tai S išsaugo Lebego matą m pagal 4.1.1 išvadą.

◁

4.1.2 PAVYZDYS. *Nustatysime ar dinaminėje sistemoje $\big([0,1], \mathcal{B}, m, S\big)$ transformacija $S(x) = 4x(1-x)$ išsaugo Lebego matą m. Po to nustatysime ar transformacija S išsaugo matą μ apibrėžtą lygybe*

$$\mu(A) = \int\limits_A \frac{dx}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \qquad A \in \mathcal{B}\big([0,1]\big).$$

▷ Transformacijos $S(t) = 4t(1-t)$ grafikas



Išsprendę lygtį $4t(1-t)=x$, gauname

$$t_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, \qquad t_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}$$

visiems $x \in [0,1]$.

Vadinasi,

$$S^{-1}\big([0,x]\big) = \left[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right] \bigcup \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}, 1\right].$$

Iš (3.1) formulės

$$\begin{aligned} Pf(x) &= \Bigg(\int\limits_{S^{-1}([0,x])} f(y)\,dy \Bigg)'_x = \Bigg(\int\limits_0^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x}} f(y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x}}^{1} f(y)\,dy \Bigg)'_x \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right) + f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1-x}\right)\right) \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \quad \text{b. v.} \end{aligned}$$

Aišku, kad

$$P\mathbb{1}(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$$

visiems $x \in [0,1]$.

Pagal 4.1.1 išvadą transformacija S neišsaugo Lebego mato m.

Antra vertus

$$\begin{aligned} &P\left(\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\pi\sqrt{(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x})(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x})}} + \frac{1}{\pi\sqrt{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-x})(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x})}} \right) \frac{1}{4\sqrt{1-x}} \\ &= \left(\frac{2}{\pi\sqrt{x}} + \frac{2}{\pi\sqrt{x}} \right) \frac{1}{4\sqrt{1-x}} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \end{aligned}$$

visiems $x \in (0,1)$.

Iš teoremos 4.1.1 išplaukia, kad transformacija S išsaugo matą μ.

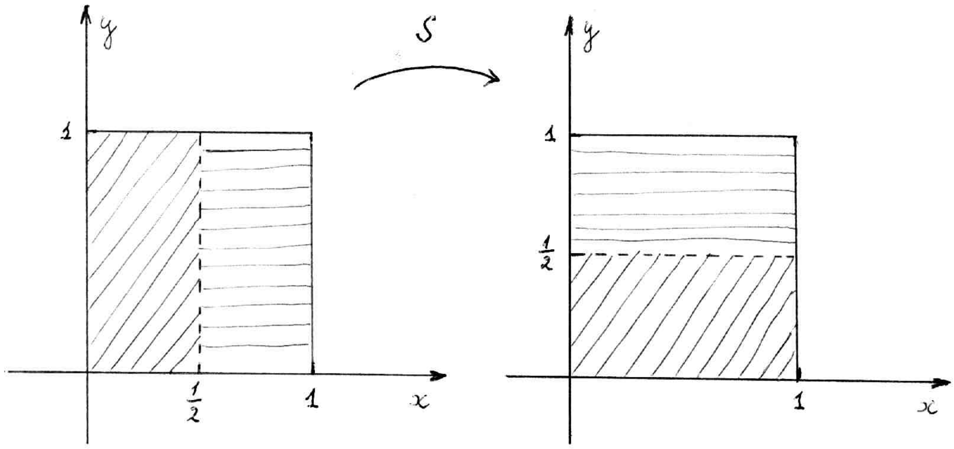
$\triangleleft$

4.1.3 PAVYZDYS (Kepėjo transformacija). *Nustatysime ar erdvės* $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ *transformacija*

$$S(x,y) = \begin{cases} \big(2x, \frac{y}{2}\big), & \text{jei } 0 \leqslant x < \frac{1}{2},\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \big(2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\big), & \text{jei } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

išsaugo Lebego matą m.

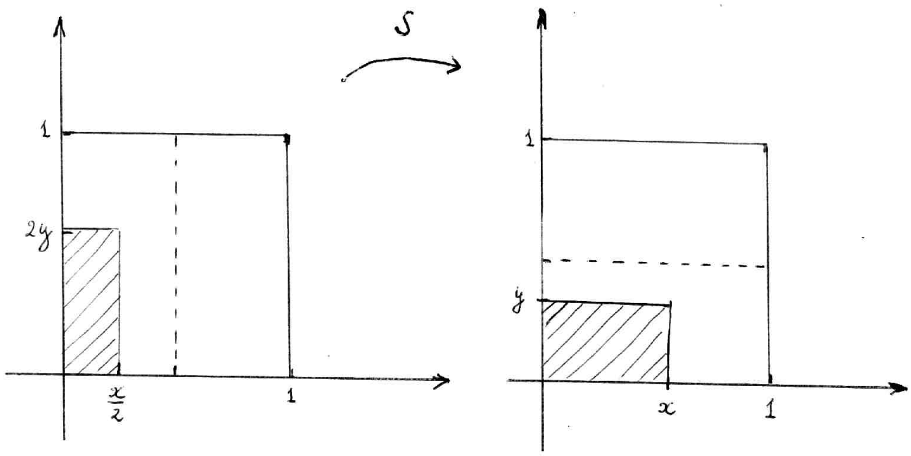
▷ Transformacijos S veikimą galima pavaizduoti brėžiniu.



Iš brėžinio nesunku pastebėti,kad transformcijos veikimas panašus į tešlos minkymą. Rasime šios transformacijos Perono operatorių. Iš (3.2.) formulės turime

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Bigg(\iint\limits_{S^{-1}([0,x]\times[0,y])} f(s,t)\, dsdt \Bigg) \quad \text{b. v.}$$

Rasime $S^{-1}\big([0,x]\times[0,y]\big)$. Sakykime pradžioje $0 \leqslant x < 1$, $0 \leqslant y < \frac{1}{2}$



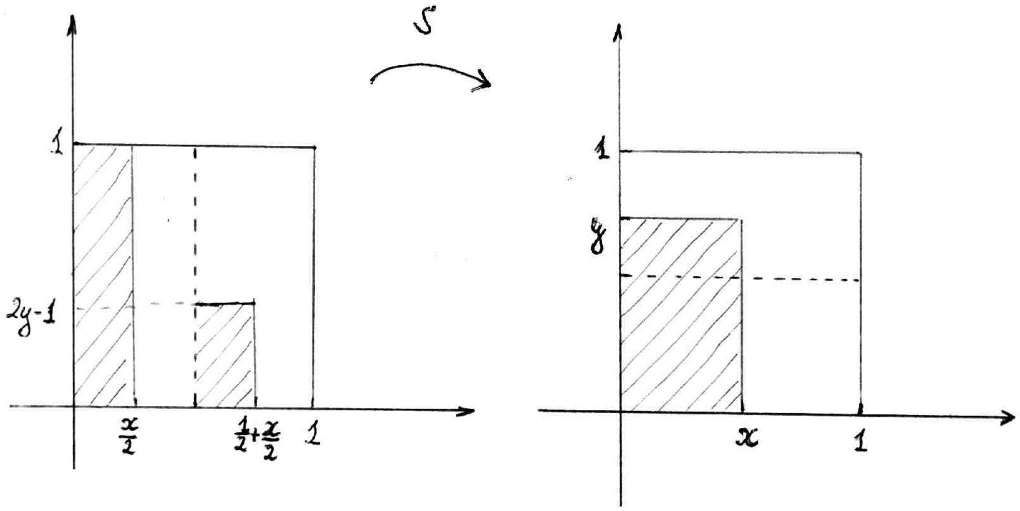
Šiuo atveju

$$S^{-1}\big([0,x]\times[0,y]\big) = \Big[0, \frac{x}{2}\Big] \times [0, 2y].$$

Vadinasi,

$$Pf(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\Bigg(\int\limits_0^{x/2} ds \int\limits_0^{2y} f(s,t)\, dt \Bigg) = f\Big(\frac{x}{2}, 2y\Big).$$

Kai $0 \leqslant x < 1$, $\frac{1}{2} \leqslant y < 1$ iš brėžinio



matosi, kad

$$S^{-1}\big([0,x]\times[0,y]\big) = \Big[0,\frac{x}{2}\Big]\times[0,1]\cup\Big[\frac{1}{2},\frac{1}{2}+\frac{x}{2}\Big]\times[0,2y-1].$$

Taigi šiuo atveju

$$\begin{aligned} Pf(x,y) &= \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\int_0^{\frac{x}{2}} ds\int_0^1 f(s,t)\,dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}+\frac{x}{2}} ds\int_0^{2y-1} f(s,t)\,dt\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}\int_0^1 f\Big(\frac{x}{2},t\Big)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2y-1} f\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2},t\Big)\,dt\right) = f\Big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2},2y-1\Big). \end{aligned}$$

Iš mūsų paskaičiavimų galima teigti, kad b. v.

$$Pf(x,y) = \begin{cases} f\big(\frac{x}{2},2y\big), & \text{jei } 0\leqslant x<1,\ 0\leqslant y<\frac{1}{2}, \\ f\big(\frac{1}{2}+\frac{x}{2},2y-1\big), & \text{jei } 0\leqslant x<1,\ \frac{1}{2}\leqslant y<1, \end{cases}$$

Kadangi $P\mathbb{1}(x,y) = 1$ b. v. , tai iš 4.1.1 išvados išplaukia, kad kepėjo transformacija S išsaugo Lebego matą m

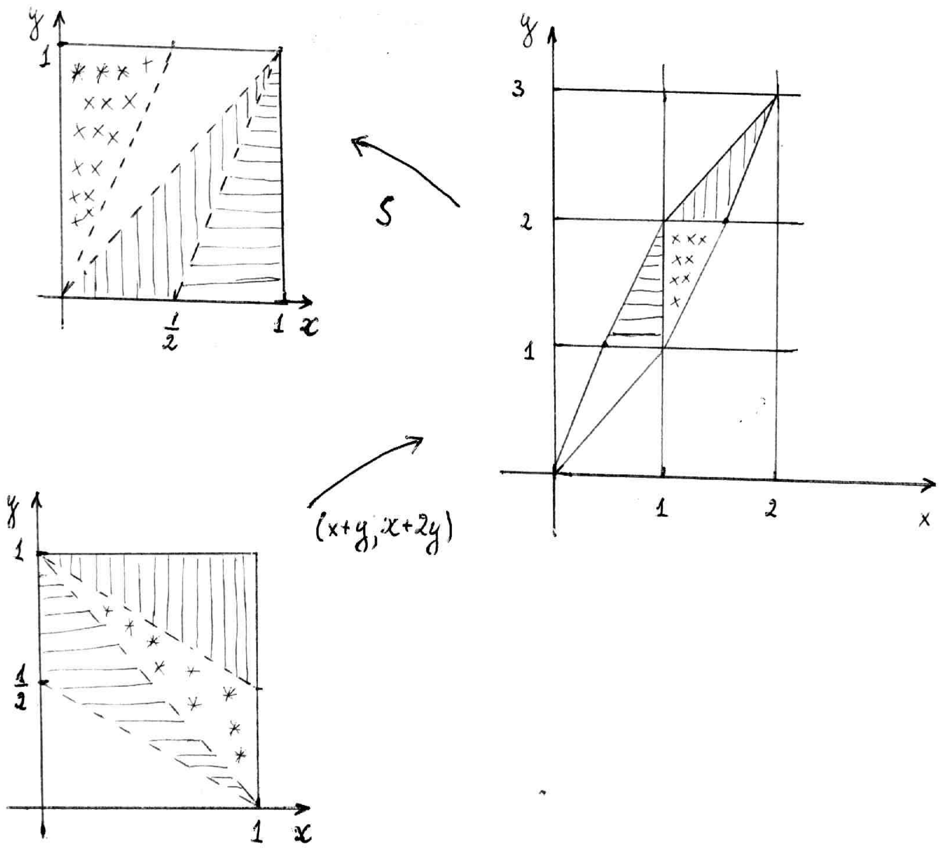
$\triangleleft$

4.1.4 PAVYZDYS (Anosovo difeomorfizmas). *Nustatysime ar erdvės* $\big([0,1]^2,\mathcal{B},m\big)$ *transformacija*

$$S(x,y) = (x+y,x+2y)\bmod 1 = \big(\{x+y\},\{x+2y\}\big)$$

išsaugo Lebego matą m.

▷ Transformacijos S veikimą parodo brėžinys



Rasime šios transformacijos Perono operatorių. Kadangi transformacija $S(x, y)$ beveik visiems (x, y) abipus vienareikšmė, tai pagal (3.4) lygybę

$$Pf(x, y) = f\big(S^{-1}(x, y)\big)J^{-1}(x, y) \quad \text{b. v.}$$

bet kuriai integruojamai erdvėje $\big([0, 1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ funkcijai $f(x, y)$.

Kai $0 < x < 1$, $x < y < \min\{2x, 1\}$ (balta zona)

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y, y - x).$$

Kai $0 < x < \frac{1}{2}$, $2x < y < 1$ (zona zu žvaigždutėmis)

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y + 1, y - x).$$

Kai $0 < y < 1$, $y < x < \frac{y+1}{2}$ (vertikaliai užbrūkšniuota zona)

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y, y - x + 1).$$

Pagaliau, kai $\frac{1}{2} < x < 1$, $0 < y < 2x - 1$ (horizontaliai užbrūkšniuota zona)

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y - 1, y - x + 1).$$

Vadinasi, visais atvejais

$$S^{-1}(x, y) = (2x - y, y - x) \bmod 1 = \big(\{2x - y\}, \{y - x\}\big), \quad \text{b. v.}$$

Kadangi

$$J^{-1}(x,y) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

tai

$$Pf(x,y) = f\big(\{2x-y\},\{y-x\}\big) \quad \text{b. v.}$$

Vadinasi, $P\mathbb{1}(x,y) = 1$ beveik visiems $(x,y) \in [0,1]^2$. Taigi Anosovo difeomorfizmas išsaugo Lebego matą m.

◁

4.2 Ergodinės transformacijos

4.2.1 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X,\mathcal{A},\mu,S)$ dinaminė sistema. Aibė $A \in \mathcal{A}$ vadinama invariantine transformacijos S atžvilgiu, jeigu $S^{-1}(A) = A$.*

Jeigu A yra transformacijos S invariantinė aibė, tai transformaciją S galima nagrinėti atskirai aibėse A ir $X \setminus A$. Iš tiesų, jei $x \in A$, tai visi trajektorijos

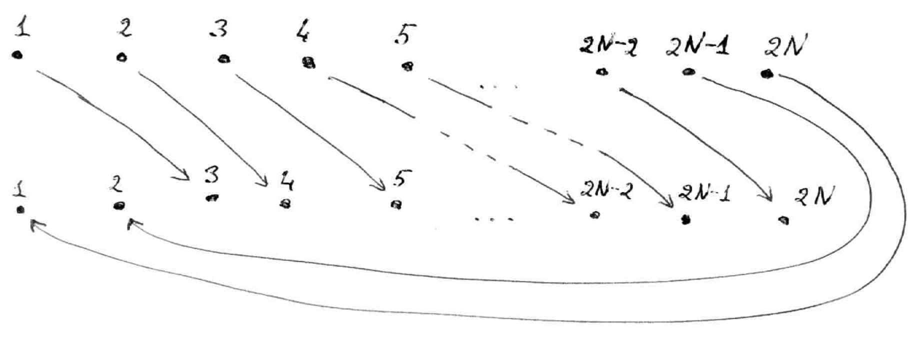
$$x, S(x), S^2(x), \ldots, S^n(x), \ldots$$

nariai irgi priklauso aibei A. O jeigu $x \in X \setminus A$, tai $S^n(x) \in X \setminus A$ visiems natūraliesiems n.

Invariantinių aibių egzistavimas matosi iš sekančio pavyzdžio. Sakykime erdvėje $\big(\{1,2,\ldots,2N\}, \{\text{visi poaibiai}\}, \{\text{aibės elementų skaičius}\}\big)$ apibrėžta transformacija S:

$$S(k) = \begin{cases} k+2, & k = 1,2,\ldots,2(N-1), \\ 1, & k = 2N-1, \\ 2, & k = 2N. \end{cases}$$

Aibės $A = \{1,3,5,\ldots,2N-1\}$ ir $X \setminus A = \{2,4,6,\ldots,2N\}$ yra invariantinės S atvžvilgiu, nes iš brėžinio



matosi, kad

$$S^{-1}(A) = \{1,3,5,\ldots,2N-1\} = A,$$
$$S^{-1}(X \setminus A) = X \setminus A.$$

4.2.2 APIBRĖŽIMAS. *Sakykime $(X,\mathcal{A},\mu,S)$ - dinaminė sistema. Transformacija S vadinama ergodine, jeigu bet kuriai invariantinei S atžvilgiu aibei A arba $\mu(A) = 0$, arba $\mu(X \setminus A) = 0$.*

Aibės $A \in \mathcal{A}$ kurioms $\mu(A) = 0$ arba $\mu(X \setminus A)$ vadinamos trivialiomis erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ aibėmis. Vadinasi, transformaciją S vadiname ergodine, jeigu visos S atžvilgiu invariantinės aibės yra trivialios.

Iš apibrėžimo aišku, kad ergodinę transformaciją S būtina nagrinėti visoje erdvėje X, nes ši transformacija „sumaišo“ visus X elementus. Jeigu S nėra ergodinė, kartais galima pasiekti S ergodiškumą siaurinant erdvę. Nagrinėtame pavyzdyje S nėra ergodinė visoje X, tačiau nesunku pastebėti S ergodiškumą aibėse A ir $X \setminus A$.

Ergodinės transformacijos turi keletą įdomių savybių. Apie jas sekančios teoremos.

4.2.1 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema. S ergodinė tada ir tik tada, jeigu bet kuriai išmatuojamai funkcijai $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B})$:*

$$f(S(x)) = f(x) \quad \textit{b. v.} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = c \quad \textit{b. v.}$$

▷ **I.** Sakykime pradžioje S ergodinė. Įrodysime

$$f(S(x)) = f(x) \quad \text{b. v.} \qquad \Rightarrow \qquad f(x) = c \quad \text{b. v.}$$

Sakykime priešingai, egzistuoja kažkokia nelygi b. v. konstantai funkcija $f(x)$, tenkinanti lygybę

$$f(S(x)) = f(x) \quad \text{b. v.}$$

Kadangi $f(x)$ nėra lygi konstantai (b. v.), tai egzistuoja realus skaičius r, kuriam aibės

$$A = \{x : \ f(x) \leqslant r\}, \qquad B = \{x : \ f(x) > r\}$$

turi teigiamus matus.

Antra vertus, aibės A ir B invariantinės, nes

$$S^{-1}(A) = \{x : \ S(x) \in A\} = \{x : \ f(S(x)) \leqslant r\} = \{x : \ f(x) \leqslant r\} = A,$$
$$S^{-1}(B) = \{x : \ S(x) \in B\} = \{x : \ f(S(x)) > r\} = \{x : \ f(x) > r\} = B.$$

Taigi aibės A ir B invariantinės, turinčios teigiamus matus. Vadinasi, S nėra ergodinė transformacija. Gautasis prieštaravimas įrodo teoremos sąlygos būtinumą.

II. Sakykime dabar bet kuriai išmatuojamai funkcijai $f : \ X \to \mathbb{R}$

$$f(S(x)) = f(x) \quad \text{b. v.} \ \Rightarrow \quad f(x) = c \quad \text{b. v.}$$

Įrodysime, kad S ergodinė transformacija.

Vėl sakykime priešingai: S nėra ergodinė. Tada egzistuoja invariantinė, netriviali aibė $A \in \mathcal{A}$. Pasirinkime $f = 1\!\!1_A$. Kadangi A nėra triviali, tai f nėra konstanta. Tačiau

$$f(S(x)) = 1\!\!1_A(S(x)) = \begin{cases} 1, & \text{jei } S(x) \in A, \\ 0, & \text{jei } S(x) \notin A. \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \in S^{-1}(A) = A, \\ 0, & x \notin S^{-1}(A) = A. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{jei } x \in A, \\ 0, & \text{jei } x \notin A. \end{cases} = 1\!\!1_A(x) = f(x).$$

Gautasis prieštaravimas prielaidai įrodo transformacijos S ergodiškumą.

◁

4.2.1 IŠVADA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema, U - transformacijos S Kupmano operatorius. Transformacija S yra ergodinė tada ir tik tada, kai bet kuris nejudamas operatoriaus U taškas yra pastovi funkcija, t. y.*

$$Uf(x) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = c.$$

4.2.2 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema, P - transformacijos S Perono operatorius. Jei S ergodinė transformacija, tai egzistuoja daugiausiai vienas operatoriaus P stacionarus tankis f_*.*

Atvirkščiai, jei egzistuoja vienintelis operatoriaus P stacionarus tankis f_* ir $f_*(x) > 0$ b. v. , tai S yra ergodinė transformacija.

▷ **I.** Pradžioje įrodysime pirmąją teoremos dalį. Sakykime S yra ergodinė erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ transformacija, tačiau egzistuoja du skirtingi operatoriaus P stacionarūs tankiai f_1 ir f_2. Pažymime $g = f_1 - f_2$.

Kadangi P tiesinis (žr. (P1) savybę iš 3.2.1 teoremos), tai

$$Pg = P(f_1 - f_2) = Pf_1 - Pf_2 = f_1 - f_2 = g.$$

Vadinasi, g yra nejudamas operatoriaus P taškas. Bet kuris Perono operatorius kartu yra ir Markovo operatorius erdvėje $L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Iš 3.1.3 teoremos turime, kad

$$Pg^+ = g^+, \qquad Pg^- = g^-.$$

Tegul

$$A = \text{supp } g^+ = \{x : \ g^+(x) > 0\} = \{x : \ f_1(x) > f_2(x)\},$$
$$B = \text{supp } g^- = \{x : \ g^-(x) > 0\} = \{x : \ f_1(x) < f_2(x)\}.$$

Aibės A ir B nesikerta. Kadangi f_1 ir f_2 yra ne tik skirtingos funkcijos, bet ir skirtingi tankiai, tai aibės A ir B turi teigiamus matus.

Iš 3.2.2 teoremos išplaukia, kad

$$\text{supp } g^+ \subset S^{-1}(\text{supp } Pg^+),$$
$$\text{supp } g^- \subset S^{-1}(\text{supp } Pg^-).$$

Vadinasi,

$$A \subset S^{-1}(A), \qquad B \subset S^{-1}(B).$$

Kadangi aibės A ir B nesikerta, tai aibės $S^{-1}(A)$ ir $S^{-1}(B)$ irgi nesikerta. Dar kartą pasinaudoję 3.2.2 teorema gauname

$$S^{-1}(A) = S^{-1}(\text{supp } g^+) \subset S^{-1}\big(S^{-1}(\text{supp } Pg^+)\big) = S^{-1}\big(S^{-1}(\text{supp } g^+)\big) = S^{-1}\big(S^{-1}(A)\big) = S^{-2}(A).$$

Analogiškai

$$S^{-1}(B) \subset S^{-2}(B).$$

Kadangi aibės $S^{-1}(A)$ ir $S^{-1}(B)$ nesikerta, tai aibės $S^{-2}(A)$ ir $S^{-2}(B)$ irgi nesikerta.

Tęsdami procesą gausime:

$$A \subset S^{-1}(A) \subset S^{-2}(A) \subset \ldots \subset S^{-n}(A),$$
$$B \subset S^{-1}(B) \subset S^{-2}(B) \subset \ldots \subset S^{-n}(B)$$

ir aibės $S^{-n}(A)$, $S^{-n}(B)$ nesikerta bet kuriems natūraliems n.

Apibrėžkime

$$A^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(A), \qquad B^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} S^{-n}(B).$$

Aibės A^*, B^* nesikerta. Be to šios aibės invariantinės, nes

$$S^{-1}(A^*) = S^{-1}\big(A \cup S^{-1}(A) \cup S^{-2}(A) \cup \ldots\big) = S^{-1}(A) \cup S^{-2}(A) \cup \ldots$$
$$= A \cup S^{-1}(A) \cup S^{-2}(A) \cup \ldots = A^*,$$

$$S^{-1}(B^*) = S^{-1}\big(B \cup S^{-1}(B) \cup S^{-2}(B) \cup \ldots\big) = S^{-1}(B) \cup S^{-2}(B) \cup \ldots$$
$$= B \cup S^{-1}(B) \cup S^{-2}(B) \cup \ldots = B^*,$$

Pagaliau, abės A^*, B^* turi teigiamus matus, nes tokius matus turi aibės A ir B.

Gavome, kad egzistuoja dvi invariantinės, nesikertančios aibės, turinčios teigiamus matus. Vadinasi, S nėra ergodinė transformacija. Gautasis prieštaravimas prielaidai rodo, kad ergodinės transformacijos Perono operatorius gali turėti daugiausiai vieną stacionarų tankį.

II. Įrodysime antrąją teoremos dalį. Sakykime $f_* > 0$ (b. v.) yra vienintelis tankis tenkinantis lygybę $Pf_* = f_*$, tačiau S nėra ergodinė. Tada egzistuoja netriviali aibė A, kuriai

$$S^{-1}(A) = A.$$

Imdami $B = X \setminus A$, gausime

$$S^{-1}(B) = B.$$

Aišku, kad

$$f_* = \mathbb{1}_A f_* + \mathbb{1}_B f_*.$$

Iš Perono operatoriaus P tiesiškumo (žr. 3.2.1 teoremą) ir lygybės $Pf_* = f_*$ gauname

$$\mathbb{1}_A f_* + \mathbb{1}_B f_* = P(\mathbb{1}_A f_*) + P(\mathbb{1}_B f_*).$$

Funkcija $\mathbb{1}_B f_*$ lygi 0 aibėje $X \setminus B = A = S^{-1}(A)$. Vadinasi (žr. 3.2.2 teoremą), $P(\mathbb{1}_B f_*) = 0$ aibėje $A = X \setminus B$. Analogiškai $P(\mathbb{1}_A f_*) = 0$ aibėje $B = X \setminus A$. Taigi, iš paskutinės lygybės išplaukia

$$\mathbb{1}_A f_* = P(\mathbb{1}_A f_*), \qquad \mathbb{1}_B f_* = P(\mathbb{1}_B f_*).$$

Kadangi $f_* > 0$ b. v. , tai $\|\mathbb{1}_A f_*\| > 0$ ir $\|\mathbb{1}_B f_*\| > 0$.
Apibrėžę funkcijas

$$f_A = \frac{\mathbb{1}_A f_*}{\|\mathbb{1}_A f^*\|}, \qquad f_B = \frac{\mathbb{1}_B f_*}{\|\mathbb{1}_B f^*\|},$$

ir dar kartą pasinaudoję P tiesiškumu gauname

$$\begin{aligned} Pf_A &= \frac{1}{\|\mathbb{1}_A f^*\|} P(\mathbb{1}_A f_*) = \frac{\mathbb{1}_A f_*}{\|\mathbb{1}_A f^*\|} = f_A, \\ Pf_B &= f_B. \end{aligned}$$

Vadinasi egzistuoja du stacionarūs operatoriaus P tankiai f_A ir f_B. Gautasis prieštaravimas antros teoremos dalies įrodymo prielaidai, parodo S ergodiškumą.

$\triangleleft$

Jeigu S yra ergodinė erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ transformacija, tai ji „judina“ visas šios erdvės aibes $A \in \mathcal{A}$. Natūraliai kyla klausimas apie tokios transformacijos trajektorijų elgesį. Pasirodo, ergodinės transformacijos atveju trajektorijos

$$x, S(x), S^2(x), \ldots$$

iš tiesų turi tam tikrų specialių savybių. Apie jas toliau.

<u>4.2.3 TEOREMA</u> (Birkofo-Chinčino). *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu, S)$ - dinaminė sistema, S - transformacija išsauganti matą μ, $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Tada egzistuoja $f^* \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, kuriai*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big) = f^*(x) \quad b.\ v.$$

Suformuluotą teoremą galima įrodyti remiantis knygoje [5] 438-439 puslapiuose pateikta įrodymo schema. Mes apsiribosime dviejų funkcijos $f^*(x)$, pasirodančios teoremos formuluotėje, savybių nustatymu.

I. *Beveik visur* $f^*(S(x)) = f^*(x)$.

$\triangleright$ Iš teoremos b. v. x gauname:

$$f^*(S(x)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(S(x))\big) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f\big(S^j(x)\big)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} f\big(S^j(x)\big) - \frac{1}{n} f(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} f\big(S^j(x)\big) = f^*(x). \qquad \triangleleft$$

II. *Jei* $\mu(X) < \infty$ *ir* $f \in L^1 \cap L^\infty$, *tai*

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int f^*(x)\,\mu(dx).$$

$\triangleright$ Kadangi S išsaugo matą, tai iš 3.2.3 teoremos gauname

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu S^{-1}(dx) = \int_{S^{-1}(X)} f(S(x))\,\mu(dx) = \int_X f(S(x))\,\mu(dx).$$

Analogiškai

$$\int_X f(S(x))\,\mu(dx) = \int_X f(S(x))\,\mu S^{-1}(dx) = \int_{S^{-1}(X)} f\big(S^2(x)\big)\,\mu(dx) = \int_X f\big(S^2(x)\big)\,\mu(dx).$$

Tęsdami gauname, kad

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X f\big(S^k(x)\big)\,\mu(dx)$$

visiems $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Vadinasi, visiems natūraliems n

$$\int_X \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big)\mu(dx) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f\big(S^k(x)\big)\,\mu(dx) = \int_X f(x)\,\mu(dx).$$

Kadangi

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big) \in L^1$$

tai, pasinaudoję integralo (L4) savybe (žr. 2.2.1 teoremą), gauname

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big)\,\mu(dx) = \int_X f^*(x)\,\mu(dx).$$

Vadinasi,

$$\int_X f(x)\,\mu(dx) = \int_X f^*(x)\,\mu(dx). \qquad \triangleleft$$

4.2.4 TEOREMA. *Sakykime $(X,\mathcal{A},\mu,S)$ - dinaminė sistema su matą išsaugančia ergodine transformacija. Tada bet kuriai integruojamai funkcijai $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big)=\frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X f(y)\,\mu(dy)\quad b.\ v.$$

Iš paskutinės teoremos matosi, kad ergodinės transformacijos atveju funkcijos f vidurkis sudarytas pagal trajektoriją $x,S(x),S^2(x),\ldots$ beveik visur lygus tos pačios funkcijos f vidurkiui pagal visą erdvę X.

▷ Funkcija $f^*(x)$ atsirandanti teoremoje 4.2.3 tenkina lygybę

$$f^*(S(x))=f^*(x)\quad \text{b. v.}$$

Kadangi S ergodinė, tai iš 4.2.1 teoremos išplaukia, kad $f^*(x)$ beveik visiems x lygi konstantai. Tegul $f^*(x)=f^*$ b. v. Tada

$$\int\limits_X f^*(x)\,\mu(dx)=f^*\int\limits_X \mu(dx)=f^*\mu(X).$$

Kadangi

$$\int\limits_X f^*(x)\,\mu(dx)=\int\limits_X f(x)\,\mu(dx),$$

tai

$$f^*(x)=f^*=\frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X f(y)\,\mu(dy)\quad \text{b. v.}$$

Įstatę gautą išraišką į 4.2.3 teoremos lygybę, gauname

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\big(S^k(x)\big)=\frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X f(y)\,\mu(dy)\quad \text{b. v.}$$ ◁

4.2.5 TEOREMA (Puankarė teoerema). *Sakykime $(X,\mathcal{A},\mu,S)$ - dinaminė sistema su matą išsaugančia ergodine transformacija, o $\mu(X)<\infty$. Tada*

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ S^k(x)\in A}}^{n-1} 1 \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad \frac{\mu(A)}{\mu(X)}\quad b.\ v.$$

Pagal teoremą trajektorijos $x,S(x),S^2(x),\ldots,S^n(x)$ elementai pakliūna į aibę A vidutiniškai $\frac{\mu(A)}{\mu(X)}n$ kartų, kai n pakankamai didelis.

▷ 4.2.4 teoremoje imdami $f=\mathbb{1}_A$, gauname

$$\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=0\\ S^k(x)\in A}}^{n-1} 1=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_A\big(S^k(x)\big)\quad\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{\mu(X)}\int\limits_X \mathbb{1}_A(y)\,\mu(dy)=\frac{\mu(A)}{\mu(X)}.$$ ◁

Iš paskutinės teoremos išplaukia, kad esant ergodinei transformacijai S, beveik visiems x bet kurią teigiamo mato aibę A trajektorijos $x, .S(x), S^2(x), \ldots$ elementai aplanko be galo daug kartų.

4.3 Sumaišančios ir užpildančios transformacijos

<u>4.3.1 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - tikimybinė erdvė, o $S : X \to X$ šios erdvės matą išsauganti transformacija. S vadinama sumaišančia transformacija, arba sumaišymu, jeigu,*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(A \cap S^{-n}(B)\big) = \mu(A)\mu(B)$$

visoms $A, B \in \mathcal{A}$.

<u>4.3.1 LEMA</u>. *Sumaišanti transformacija yra ergodinė.*

$\triangleright$ Sakykime S yra sumaišanti erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ transformacija, o $B \in \mathcal{A}$ šios transformacijos invariantinė aibė, t. y. $B = S^{-1}(B)$.

Tada

$$\begin{aligned} S^{-2}(B) &= S^{-1}\big(S^{-1}(B)\big) = S^{-1}(B) = B, \\ S^{-n}(B) &= S^{-1}\big(S^{-(n-1)}(B)\big) = \ldots = S^{-1}(B) = B. \end{aligned}$$

visiems natūraliems n. Imkime $A = X \setminus B$. Gauname

$$\mu\big(A \cap S^{-n}(B)\big) = \mu(A \cap B) = \mu(X \setminus B \,\cap\, B) = 0.$$

Kadangi S sumaišanti transformacija, tai

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(A \cap S^{-n}(B)\big) = \mu(A)\mu(B) = \mu(B)(1 - \mu(B)).$$

Vadinasi,

$$(1 - \mu(B))\mu(B) = 0.$$

Taigi $\mu(B) = 0$ arba $\mu(B) = 1$. Vadinasi, bet kuri invariantinė transformacijos S aibė yra triviali. Tai rodo transformacijos S ergodiškumą.

$\triangleleft$

<u>4.3.2 APIBRĖŽIMAS</u>. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ - tikimybinė erdvė, o $S : X \to X$ yra šios erdvės matą išsauganti transformacija tenkinanti sąlygą: $S(A) \in \mathcal{A}$ visoms $A \in \mathcal{A}$. Jei*

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(S^n(A)\big) = 1$$

visoms $A \in \mathcal{A}$, kurioms $\mu(A) > 0$, tai S vadinama užpildančia transformacija.

Nesunku pastebėti, kad nė viena abipus vienareikšmė matą išsauganti transformacija negali būti užpildanti. Iš tiesų, jei S yra tokia, tai

$$\begin{aligned} &\mu\big(S(A)\big) = \mu\big(S^{-1}(S(A))\big) = \mu(A), \\ &\mu\big(S^2(A)\big) = \mu\big(S^{-1}(S^2(A))\big) = \mu(S(A)) = \mu(A), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mu\big(S^n(A)\big) = \mu(A) \end{aligned}$$

visiems natūraliems n.

Galima įrodyti, kad bet kuri užpildanti transformacija yra sumaišanti. Tiesioginis šio fakto įrodymas gana sudėtingas. Tačiau iš sekančio skyrelio rezultatų jis lengvai gaunamas. Vadinasi, tikimybinėje erdvėje turime

$$S \quad \text{užpildanti} \quad \Rightarrow \quad S \quad \text{sumaišanti} \quad \Rightarrow \quad S \quad \text{ergodinė}.$$

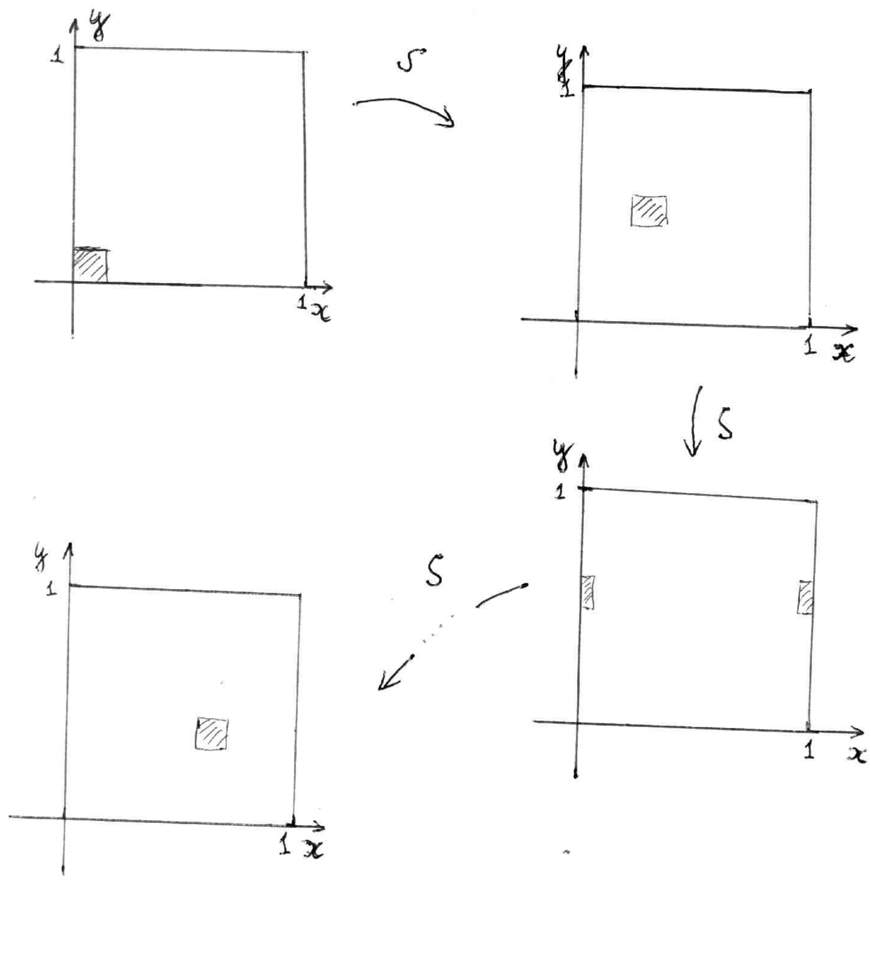
Užpildančios, sumaišančios ir ergodinės transformacijos yra pagrindinės matą išsaugančių transformacijų rūšys. Kaip atskirti šias transformacijas vieną nuo kitos naudojant Perono ir Kupmano operatorius parodysime sekančiame skyriuje. Koks šių skirstingų rūšių transformacijų geometrinis veikimas galime pamatyti iš toliau pateiktų pavyzdžių.

4.3.1 PAVYZDYS. *Erdvėje* $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ *nagrinėjame transformaciją* $S(x,y) = \big(\{x+\sqrt{2}\}, \{y+\sqrt{3}\}\big)$.

Kadangi $S^{-1}(x,y) = \big(\{x-\sqrt{2}\}, \{y-\sqrt{3}\}\big)$ b. v. , tai naudodami (3.4) formulę gauname

$$Pf(x,y) = f\big(S^{-1}(x,y)\big)J^{-1}(x,y) = f\big(\{x-\sqrt{2}\}, \{y-\sqrt{3}\}\big).$$

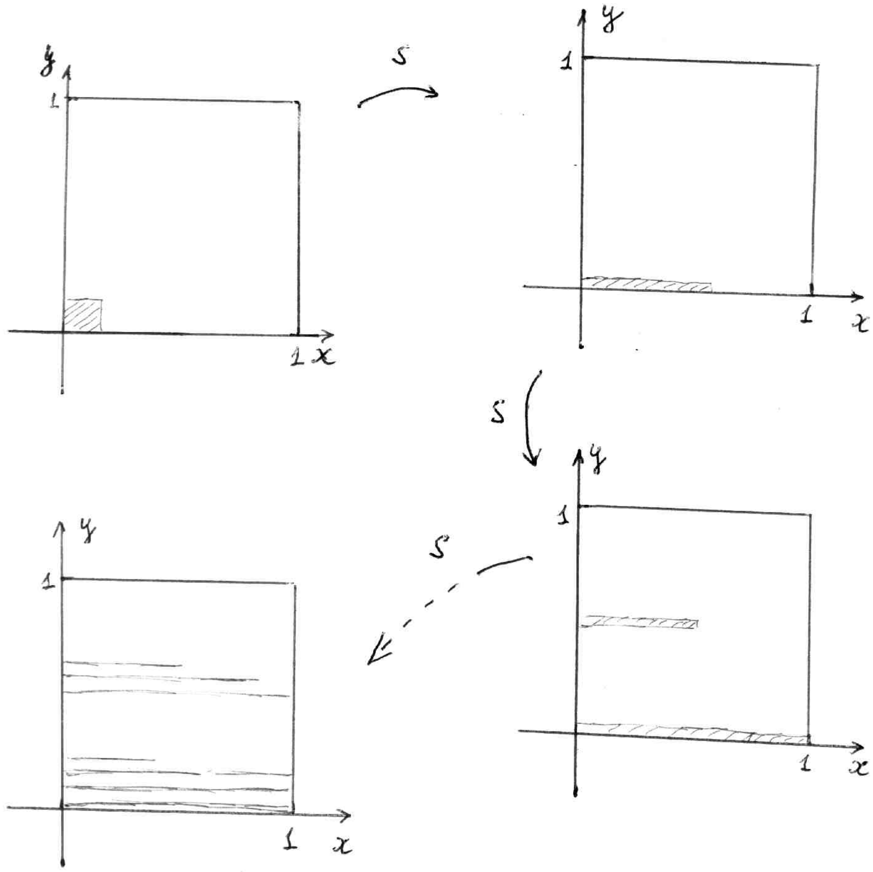
Vadinasi, $P\mathbb{1}(x,y) = 1$ b. v. Taigi transformacija S išsaugo matą. Naudojant sekančio skyriaus rezultatus galima parodyti, kad S *ergodinė, bet nėra sumaišanti.* Geometrinis šios transformacijos veikimo vaizdas toks:



4.3.2 PAVYZDYS. *Erdvėje* $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ *nagrinėjame kepėjo transformaciją*

$$S(x,y) = \begin{cases} \big(2x, \frac{y}{2}\big), & jei\ \ 0 \leqslant x < \frac{1}{2},\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ \big(2x-1, \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\big), & jei\ \ \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1,\ \ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

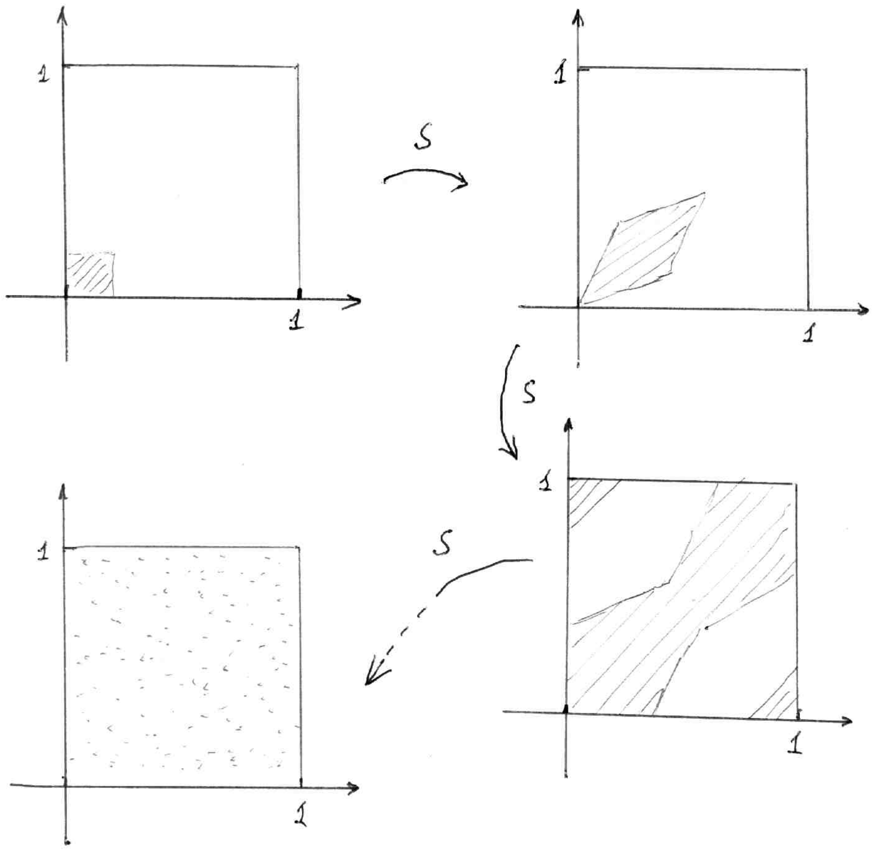
Buvo parodyta (žr. 4.1.3 pavyzdį), kad ši transformacija išsaugo erdvės matą m. Naudojant sekančio skyrelio rezultatus galime parodyti, kad S *sumaišanti, bet nėra tiksli*, (bent jau dėl to, kad S abipus vienareikšmė). Geometrinį šios transformacijos veikimą rodo piešinys



4.3.3 PAVYZDYS. *Erdvėje* $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ *nagrinėjame transformaciją*

$$S(x,y) = \big(\{3x+y\}, \{x+3y\}\big).$$

Apskaičiavus Perono operatorių ir pritaikius sekančio skyrelio rezultatus galim parodyti, kad ši transformacija S *yra užpildanti* ervdėje $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$. Geometriškai šios transformacijos veikimas maždaug toks



V
OPERATORIŲ TAIKYMAS TRANSFORMACIJŲ TYRIMUI

5.1 Pagrindinės transformacijų klasifikavimo teoremos

Ankstesniame skyriuje buvo išskirtos pagrindinių matą išsaugančių transformacijų rūšys. Ergodinės, sumaišančios ir užpildančios transformacijos skirtingai veikia σ-algebros aibes. Nustatyti konkrečią transformacijos rūšį pagal apibrėžimą gana sunku. Šiame skyriuje nurodysime būdą, kaip nustatyti transformacijos rūšį naudojant su ja susijusius operatorius.

5.1.1 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – tikimybinė erdvė, $S : X \to X$ matą išsauganti transformacija, o P – šios transformacijos Perono operatorius. Teisingi tokie teiginiai*

(a) *S ergodinė* $\Leftrightarrow$ $P^n f \to 1$ *Čezaro prasme visoms $f \in \mathcal{D}$.*

(b) *S sumaišanti* $\Leftrightarrow$ $P^n f \to 1$ *silpnai visoms $f \in \mathcal{D}$.*

(c) *S užpildanti* $\Leftrightarrow$ $P^n f \to 1$ *stipriai visoms $f \in \mathcal{D}$.*

Pasinaudoję funkcijų sekų konvergavimo apibrėžimais galime įrodyti tokią ekvivalenčią teoremą.

5.1.2 TEOREMA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – tikimybinė erdvė, $S : X \to X$ matą išsauganti transformacija, o P – šios transformacijos Perono operatorius. Tada:*

$(a)^*$ *S ergodinė* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} < P^k f, g >=< f, 1 >< 1, g >$, *visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.*

$(b)^*$ *S sumaišanti* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} < P^n f, g >=< f, 1 >< 1, g >$, *visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.*

$(c)^*$ *S užpildanti* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|P^n f- < f, 1 > \| = 0$.

$\triangleright$ Parodysime, pavyzdžiui tvirtinimų (b) ir $(b)^*$ ekvivalentumą.

I. Sakykime pradžioje tenkinama teiginio (b) sąlyga, t. y. $P^n f \to 1$ silpnai visoms $f \in \mathcal{D}$. Pagal 2.5.2 apibrėžimą

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g >=< 1, g >$$

visiems tankiams $f \in \mathcal{D}$ ir visoms $g \in L^\infty$.

Kadangi $< f, 1 >= 1$ kiekvienam tankiui $f \in \mathcal{D}$, tai

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g >=< f, 1 >< 1, g >$$

visiems $f \in \mathcal{D}$ ir visoms $g \in L^\infty$.

Sakykime dabar $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, $f \geqslant 0$. Tada $f/ < f, 1 >\in \mathcal{D}$. Pritaikę pakutinę lygybę funkcijai $f/ < f, 1 >$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} \Big\langle P^n \frac{f}{< f, 1 >} \Big\rangle = \Big\langle \frac{f}{< f, 1 >}, 1 \Big\rangle < 1, g >$$

visiems $f \geqslant 0$, $f \in L^1$ ir visoms $g \in L^\infty$.

Operatorius P, taigi ir operatorius P^n yra tiesiniai (žr. 3.2.1 teoremą).

Vadinasi, iš paskutinės lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > = < f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f \geqslant 0$, $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Pasirinkę $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ ir pritaikę paskutinę lygybę atskirai funkcijoms f^+ ir f^-, gauname

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > &= \lim_{n\to\infty} < P^n(f^+ - f^-), g > = \lim_{n\to\infty} < P^n f^+, g > - \lim_{n\to\infty} < P^n f^-, g > \\ &= < f^+, 1 >< 1, g > - < f^-, 1 >< 1, g > \\ &= \big(< f^+, 1 > - < f^-, 1 > \big) < 1, g > = < f, 1 >< 1, g > .\end{aligned}$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > = < f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Gavome teiginio $(b)^*$ sąlygą.

II. Sakykime patenkinta teiginio $(b)^*$ sąlyga, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > = < f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Pasirinkime $f \in \mathcal{D}$. Kadangi šiuo atveju

$$< f, 1 > = \int\limits_X f\, \mu(dx) = 1,$$

tai

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > = < 1, g >$$

visoms $f \in \mathcal{D}$, $g \in L^\infty$. Pagal silpno konvergavimo apibrėžimą (žr. 2.5.2 apibrėžimą) gauname, kad $P^n f \to 1$ silpnai visoms $f \in \mathcal{D}$. Taigi patenkinta teiginio (b) sąlyga.

Analogiškai samprotaujant nesunku parodyti, kad $(a) \Leftrightarrow (a)^*$ ir $(c) \Leftrightarrow (c)^*$. $\triangleleft$

5.1.1 IŠVADA. *Sakykime $(X, \mathcal{A}, \mu)$ – tikimybinė erdvė, $S : X \to X$ matą išsauganti transformacija, U – jos Kupmano operatorius. Tada:*

$(a)^{**}$ *S ergodinė* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} < f, U^k g > = < f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

$(b)^{**}$ *S sumaišanti* $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} < f, U^n g > = < f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Paskutinė išvada išplaukia iš 5.1.2 teoremos ir Kupmano operatoriaus savybės (K3) (žr. 3.3.1 teoremą).

Naudojant analogišką metodą, kaip įrodant 5.1.2 teoremą galime gauti sekančius tvirtinimus.

<u>5.1.3 TEOREMA</u>. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *– tikimybinė erdvė,* $S : X \to X$ *matą išsauganti transformacija,* P *– šios transformacijos Perono operatorius,* $p \geqslant 1$ *–fiksuotas realus skaičius,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Tada*

$(a)\hat{}$ *S ergodinė* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} < P^k f, g >=< f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$.

$(b)\hat{}$ *S sumaišanti* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} < P^n f, g >=< f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$.

$(c)\hat{}$ *S užpildanti* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \| P^n f - < f, 1 > \|_{L^p} = 0$ *visoms* $f \in L^p$.

<u>5.1.2 IŠVADA</u>. *Sakykime* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *– tikimybinė erdvė,* $S : X \to X$ *matą išsauganti transformacija,* U *– šios transformacijos Kupmano operatorius,* $p \geqslant 1$ *fiksuotas realus skaičius,* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. *Tada:*

$(a)\tilde{}$ *S ergodinė* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=0}^{n-1} < f, U^k g >=< f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$.

$(b)\tilde{}$ *S sumaišanti* $\Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} < f, U^n g >=< f, 1 >< 1, g >$ *visoms* $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$.

Norint nustatyti transformacijos rūšį suformuluotų teoremų pagalba nebūtina tikrinti teiginių sąlygas visoms $f \in L^p$, $g \in L^{p'}$. Pakanka nagrinėti tiesiškai tankius erdvių L^p ir $L^{p'}$ poaibius. Tai išplaukia iš 2.5.3 apibrėžimo ir 2.5.1, 2.5.2 teoremų.

5.2 5.1.2 teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje įrodysime teoremą 5.1.2. Teoremos 5.1.3 įrodymas analogiškas, bet sudėtingesnis techniškai. Įrodymą skaidysime į keletą dalių.

I. Sakykime patenkinta $(a)^*$ sąlyga, t. y.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} < P^k f, g >=< f, 1 >< 1, g > \tag{5.1}$$

visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Įrodysime, kad S yra ergodinė transformacija. Sakykime $A \in \mathcal{A}$ yra invariantinė transformacijos S atžvilgiu. Šitai aibei

$$S^{-1}(A) = A, \qquad 0 \leqslant \mu(A) \leqslant 1.$$

Kadangi S išsaugo matą, tai bet kuriai $B \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} \int\limits_B P\mathbb{I}_A \, \mu(dx) &= \int\limits_{S^{-1}(B)} \mathbb{I}_A \, \mu(dx) = \mu\big(A \cap S^{-1}(B)\big) \\ &= \mu\big(S^{-1}(A) \cap S^{-1}(B)\big) = \mu\big(S^{-1}(A \cap B)\big) = \mu(A \cap B), \end{aligned}$$

$$\int\limits_B \mathbb{I}_A \, \mu(dx) = \mu(A \cap B).$$

Iš gautų lygybių ir 2.2.3 teoremos gauname, kad $P\mathbb{I}_A = \mathbb{I}_A$ b. v.

Vadinasi, (5.1) lygybės kairė pusė funkcijai $f = 1\!\!1_A$ lygi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} < P^k f, g >= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} < 1\!\!1_A, g >=< 1\!\!1_A, g > .$$

Taigi, bet kuriai $g \in L^\infty$

$$< 1\!\!1_A, g >= \mu(A) < 1, g > .$$

Pasirinkę $g = 1\!\!1_{X\setminus A}$, gauname

$$\mu(A \cap X \setminus A) = \mu(A)(1 - \mu(A)).$$

Vadinasi, $\mu(A)(1 - \mu(A)) = 0$ bet kuriai transformacijos S invariantinei aibei A. Taigi bet kuri transformacijos S invariantinė aibė yra triviali, S yra ergodinė.

II. Sakykime S yra ergodinė tikimybinės erdvės $(X, \mathcal{A}, \mu)$ transformacija. Įrodysime (5.1) lygybę. Kadangi erdvė $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tikimybinė, tai bet kuri $g \in L^\infty$ yra integruojama. Iš Birkofo-Chinčino teoremos (žr. 4.2.4 teoremą) išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\big(S^k(x)\big) = \int_X g(y)\,\mu(dy) =< 1, g > \quad \text{b. v.}$$

Pasirinkus $f \in L^1$ gauname

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x) g\big(S^k(x)\big) =< 1, g > f(x) \quad \text{b. v.}$$

Iš integralo savybių (L3) ir (L4) (žr. 2.2.1 teoremą) išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_X f(x) g\big(S^k(x)\big)\,\mu(dx) =< f, 1 >< 1, g > .$$

Kadangi

$$\int_X f(x) g\big(S^k(x)\big)\,\mu(dx) = \int_X f(x) U^k\big(g(x)\big)\,\mu(dx) =< f, U^k g >$$

Bet kokiam $k = 0, 1, \ldots$, tai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} < f, U^k g >=< f, 1 >< 1, g > .$$

Pasinaudoję Kupmano operatoriaus savybe (K3) iš 3.3.1 teoremos, gauname (5.1) lygybę.

III. Sakykime S sumaišanti transformacija. Įrodysime, kad

$$\lim_{n\to\infty} < P^n f, g >=< f, 1 >< 1, g > \tag{5.2}$$

visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$.

Pagal sumaišančios transformacijos apibrėžimą

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(A \cap S^{-n}(B)\big) = \mu(A)\mu(B), \qquad A, B \in \mathcal{A}.$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty}\int_X \mathbb{I}_A(x)\mathbb{I}_B\big(S^n(x)\big)\,\mu(dx)=\int_X \mathbb{I}_A(x)\,\mu(dx)\int_X \mathbb{I}_B(x)\,\mu(dx).$$

Pasinaudojus Kupmano operatoriaus apibrėžimu (žr. 3.3.1 apibrėžimą) gauname

$$\lim_{n\to\infty} < \mathbb{I}_A, U^n\mathbb{I}_B > = < \mathbb{I}_A, 1 >< 1, \mathbb{I}_B > .$$

Kadangi Kupmano operatorius jungtinis Perono operatoriui (savybė (K3) iš 3.3.1 teoremos), tai

$$\lim_{n\to\infty} < P^n\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B > = < \mathbb{I}_A, 1 >< 1, \mathbb{I}_B > .$$

Kadangi Perono operatorius tiesinis, tai pasinaudojus integralo savybe (L3) iš 2.2.1 teoremos, gauname, kad paprastosioms funkcijoms

$$f=\sum_{i\in I}\lambda_i\mathbb{I}_{A_i},\qquad g=\sum_{j\in J}\sigma_j\mathbb{I}_{B_j}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} < P^n f, g > &= \lim_{n\to\infty}\Big\langle P^n\sum_{i\in I}\lambda_i\mathbb{I}_{A_i}, \sum_{j\in J}\sigma_j\mathbb{I}_{B_j}\Big\rangle\\
&= \lim_{n\to\infty}\Big\langle \sum_{i\in I}\lambda_i P^n\mathbb{I}_{A_i}, \sum_{j\in J}\sigma_j\mathbb{I}_{B_j}\Big\rangle = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}\lambda_i\sigma_j\lim_{n\to\infty} < P^n\mathbb{I}_{A_i}\mathbb{I}_{B_j} >\\
&= \sum_{i\in I}\lambda_i\sigma_j < \mathbb{I}_{A_i},1 >< 1,\mathbb{I}_{B_j} > = \sum_{i\in I}\lambda_i < \mathbb{I}_{A_i},1 > \sum_{j\in J}\sigma_j < 1,\mathbb{I}_{B_j} >\\
&= \Big\langle \sum_{i\in I}\lambda_i\mathbb{I}_{A_i},1\Big\rangle\Big\langle 1,\sum_{j\in J}\sigma_j\mathbb{I}_{B_j}\Big\rangle = < f,1 >< 1,g > .
\end{aligned}$$

Sakykime dabar $f\in L^1$, o $g\in L^\infty$. Pasirinkime $\varepsilon>0$. Funkcijai $g\in L^\infty$ galima surasti paprastųjų funkcijų seką $\{g_k\}$, kuriai

$$\|g-g_k\|_{L^\infty}<\varepsilon$$

visiems $k\geqslant K$.

Funkcijai $f\in L^1$, galima surasti paprastųjų funkcijų seką $\{f_k\}$, kuriai

$$\|f-f_k\|<\varepsilon$$

visiems $k\geqslant K$.

Aišku, kad

$$\begin{aligned}
\big| < P^n f,g > - < f,1 >< 1,g > \big| &\leqslant \big| < P^n f,g > - < P^n f_k,g_k > \big|\\
&+ \big| < P^n f_k,g_k > - < f_k,1 >< 1,g_k > \big|\\
&+ \big| < f_k,1 >< 1,g_k > - < f,1 >< 1,g > \big|.
\end{aligned}$$

Kai $k\geqslant K$, pasinaudoję Markovo operatoriaus savybe (M4), gauname

$$\begin{aligned}
\big| < P^n f,g > - < P^n f_k,g_k > \big| &\leqslant \big| < P^n f,g > - < P^n f_k,g > \big| + \big| < P^n f_k,g > - < P^n f_k,g_k > \big|\\
&= \big| < P^n(f-f_k),g > \big| + \big| < P^n f_k, g-g_k > \big|\\
&\leqslant \|g\|_{L^\infty}\big\|P^n(f-f_k)\big\| + \|P^n f_k\|\,\|g-g_k\|_{L^\infty}\\
&\leqslant \|g\|_{L^\infty}\big\|f-f_k\big\| + \|f_k\|\|g-g_k\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty}+\|f_k\|\big)\\
&\leqslant \varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty}+\|f_k-f\|+\|f\|\big) \leqslant \varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty}+\|f\|+\varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Analogiškai visiems $k \geqslant K$

$$\begin{aligned}
\big| < f_k, 1 < 1, g_k > - < f,1 >< 1,g > \big| &\leqslant \big| < f_k, 1 >< 1, g_k > - < f_k, 1 >< 1, g > \big| \\
&+ \big| < f_k, 1 >< 1, g > - < f, 1 >< 1, g > \big| \\
&= \big| < f_k, 1 >< 1, g_k - g > \big| + \big| < f_k - f, 1 >< 1, g > \big| \\
&\leqslant \|f_k\| \, \|1\|_{L^\infty} \|1\| \, \|g_k - g\|_{L^\infty} + \|f_k - f\| \, \|1\|_{L^\infty} \|1\| \, \|g\|_{L^\infty} \\
&\leqslant \varepsilon \|f_k\| + \varepsilon \|g\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty} + \|f\| + \varepsilon\big).
\end{aligned}$$

Vadinasi, visiems $k \geqslant K$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \big| < P^n f, g > - < f, 1 >< 1, g > \big| \leqslant 2\varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty} + \|f\| + \varepsilon\big) \\
&+ \lim_{n\to\infty} \big| < P^n f_k, g_k > - < f_k, 1 >< 1, g_k > \big|.
\end{aligned}$$

Kadangi f_k ir g_k yra paprastosios funkcijos, tai pagal įrodytą dalį riba esanti dešinėje nelygybės pusėje lygi 0. Taigi visiems $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \big| < P^n f, g > - < f, 1 >< 1, g > \big| \;\leqslant\; 2\varepsilon\big(\|g\|_{L^\infty} + \|f\| + \varepsilon\big).$$

Abiejose nelygybės pusėse perėję prie ribos kai $\varepsilon \downarrow 0$, gauname, kad (5.2) lygybė galioja bet kokioms funkcijoms $f \in L^1$ ir $g \in L^\infty$.

IV. Sakykime patenkinta teiginio $(b)^*$ sąlyga, t. y. (5.2) lygybė teisinga visoms $f \in L^1$, $g \in L^\infty$. Parodysime, kad transformacija S šiuo atveju yra sumaišanti. Pasirinkę $f = \mathbb{I}_A$, $g = \mathbb{I}_B$, $A, B \in \mathcal{A}$, gausime

$$\lim_{n\to\infty} < P^n \mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B > = < \mathbb{I}_A, 1 >< 1, \mathbb{I}_B > .$$

Iš Kupmano operatoriaus savybės (K3) (žr. 3.3.1 teoremą) išplaukia

$$\lim_{n\to\infty} < \mathbb{I}_A, U^n \mathbb{I}_B > = < \mathbb{I}_A, 1 >< 1, \mathbb{I}_B > .$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \mathbb{I}_A(x) U^n \mathbb{I}_B(x)\, \mu(dx) = \int\limits_X \mathbb{I}_A(x)\, \mu(dx) \int\limits_X \mathbb{I}_B(x)\, \mu(dx),$$

arba

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X \mathbb{I}_A(x) \mathbb{I}_B\big(S^n(x)\big)\, \mu(dx) = \mu(A)\mu(B).$$

Taigi

$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(A \cap S^{-n}(B)\big) = \mu(A)\mu(B)$$

bet kurioms aibėms $A, B \in \mathcal{A}$. Gavome, kad transformacija S sumaišanti.

V. Pakutinės teoremos dalies tvirtinimą įrodysime tik į vieną pusę. Parodysime sąlygos $(c)^*$ pakankamumą. Sąlygos $(c)^*$ būtinumo įrodymą paliekame skaitytojui.

Sakykime visoms $f \in L^1$

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f - < f, 1 > \| = 0$$

Įrodysime, kad transformacija S šiuo atveju yra užpildanti. Pasirinkime $A \in \mathcal{A}$, kuriai $\mu(A) > 0$. Apibrėžkime funkciją

$$f_A(x) = \frac{1}{\mu(A)} \mathbb{I}_A(x).$$

Kadangi funkcija $f_A \in \mathcal{D}$, tai $< f_A, 1 >= 1$. Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \|P^n f_A - 1\| = 0.$$

Pažymėkime

$$r_n = \|P^n f_A - 1\|.$$

Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}\mu\big(S^n(A)\big) &= \int\limits_{S^n(A)} \mu(dx) = \int\limits_{S^n(A)} P^n f_A(x)\,\mu(dx) - \int\limits_{S^n(A)} \big(P^n f_A(x) - 1\big)\,\mu(dx) \\ &\geqslant \int\limits_{S^n(A)} P^n f_A(x)\,\mu(dx) - \|P^n f_A - 1\| = \int\limits_{S^n(A)} P^n f_A(x)\,\mu(dx) - r_n.\end{aligned}$$

Iš Perono operatoriaus apibrėžimo (žr. 3.2.4(B) apibrėžimą) išplaukia, kad bet kuriam natūraliąjam n

$$\begin{aligned}\int\limits_{S^n(A)} P^n f_A(x)\,\mu(dx) &= \int\limits_{S^n(A)} P\big(P^{n-1} f_A(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-1}(S^n(A))} P^{n-1}\big(f_A(x)\big)\,\mu(dx) \\ &= \int\limits_{S^{-1}(S^n(A))} P\big(P^{n-2} f_A(x)\big)\,\mu(dx) = \int\limits_{S^{-2}(S^n(A))} \big(P^{n-2} f_A(x)\big)\,\mu(dx) \\ &= \ldots = \int\limits_{S^{-n}(S^n(A))} f_A(x))\big)\,\mu(dx).\end{aligned}$$

Kadangi $A \subset S^{-n}(S^n(A))$, tai paskutinis integralas lygus 1. Vadinasi,

$$\mu\big(S^n(A)\big) \geqslant 1 - r_n$$

visiems natūraliems n. Kadangi seka r_n nykstanti, tai iš paskutinės nelygybės išplaukia kad

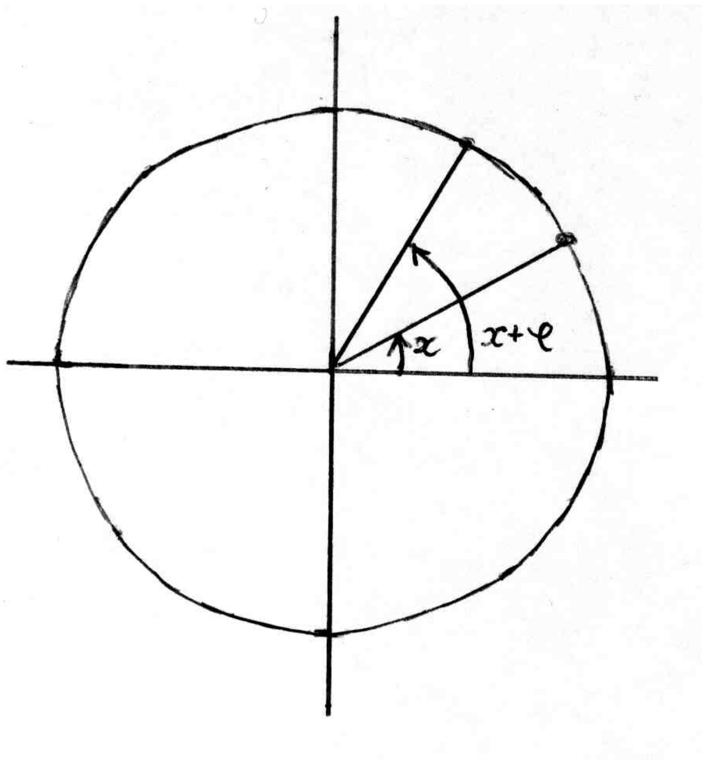
$$\lim_{n\to\infty} \mu\big(S^n(A)\big) = 1$$

bet kuriai $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) > 0$. Taigi S – užpildanti transformacija.

5.3 Transformacijų tyrimo pavyzdžiai

<u>5.3.1 PAVYZDYS</u>. *Erdvėje* $\big([0, 2\pi], \mathcal{B}, \frac{m}{2\pi}\big)$ *apibrėžta transformacija* $S(x) = (x + \varphi) \bmod 2\pi$. *Čia* φ *fiksuotas skaičius, kuriam* $\varphi/2\pi$ *yra iracionalus. Parodysim, kad transformacija* S *yra ergodinė erdvės* $\big([0, 2\pi], \mathcal{B}, \frac{m}{2\pi}\big)$ *transformacija.*

▷ Transformacijos S veikimą galima įsivaizduoti kaip apskritimo taškų pasukimą kampu φ prieš laikrodžio rodyklę.



Pradžioje rasime šios transformacijos Perono operatorių. Pagal apibrėžimą

$$\int_A Pf(x)\,\frac{m}{2\pi}(dx) = \int_{S^{-1}(A)} f(x)\,\frac{m}{2\pi}(dx),$$

$$\int_A Pf(y)\,dy = \int_{S^{-1}(A)} f(y)\,dy$$

visoms $A \in \mathcal{B}([0, 2\pi])$.

Sakykime pradžioje $0 < x < 2\pi - \varphi$. Pasirinkę $A = [\varphi, \varphi + x]$, gauname

$$\int_{\varphi}^{x+\varphi} Pf(y)\,dy = \int_{S^{-1}([\varphi,\varphi+x])} f(y)\,dy = \int_0^x f(y)\,dy.$$

Vadinasi,

$$Pf(x+\varphi) = f(x) \quad \text{b. v. },$$

kai $0 < x < 2\pi - \varphi$, arba

$$Pf(x) = f(x-\varphi) \quad \text{b. v.}$$

kai $\varphi < x < 2\pi$.

Sakykime dabar $0 < x \geqslant \varphi$. Pasirinkę $A = [0, x]$, gauname

$$\int_0^x Pf(y)\,dy = \int_{S^{-1}([0,x])} f(y)\,dy.$$

Kadangi nagrinėjamu atveju $S^{-1}([0,x]) = [2\pi - \varphi, 2\pi - \varphi + x]$, tai

$$\int\limits_0^x Pf(y)\,dy = \int\limits_{2\pi-\varphi}^{2\pi-\varphi+x} f(y)\,dy.$$

Vadinasi,

$$Pf(x) = f(2\pi - \varphi + x)$$

kai $0 < x \geqslant \varphi$.

Taigi,

$$Pf(x) = \begin{cases} f(2\pi - \varphi + x), & \text{kai } 0 < x \geqslant \varphi, \\ f(x - \varphi), & \text{kai } \varphi < x < 2\pi. \end{cases}$$

Kadangi $P\mathbb{1} = 1$ b. v. , tai transformacija S išsaugo matą $\frac{m}{2\pi}$. Vadinasi, ergodiškumui patikrinti galime naudoti 5.1 skyrelio teoremas ir išvadas. Pagal 5.1.2 išvadą transformacija S ergodinė tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} < f, U^j g > = < f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f, g \in L^2$.

Pasirinkime pradžioje funkciją $g(x) = e^{ikx}$, kur $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, o $i^2 = -1$. Aišku, kad

$$U^j g(x) = g\big(S^j(x)\big) = e^{ik(x+j\varphi)},$$

$$\alpha_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{ik(x+j\varphi)}$$

$$= \frac{1}{n} e^{ikx} \sum_{j=0}^{n-1} e^{ikj\varphi} = \frac{1}{n} e^{ikx} \frac{e^{ik\varphi n} - 1}{e^{ik\varphi} - 1}.$$

$$\|\alpha_n(x)\|_{L^2} = \left(\int\limits_0^{2\pi} \left| \frac{1}{n} e^{ikx} \frac{e^{ik\varphi n} - 1}{e^{ik\varphi} - 1} \right|^2 \frac{dx}{2\pi} \right)^{1/2}$$

$$= \frac{e^{ik\varphi n} - 1}{2\pi n |e^{ik\varphi} - 1|} \int\limits_0^{2\pi} |e^{ikx}|^2\,dx \leqslant \frac{2}{n|e^{ik\varphi} - 1|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Antra vertus

$$< 1, g > = \int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{ik}(e^{2\pi ik} - 1) = 0.$$

Jei $g(x) = 1$, tai $\alpha_n(x) \equiv 1$ ir

$$< 1, g > = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{2\pi} = 1.$$

Taigi visiems $k \in \mathbb{Z}$

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{ikx} - < 1, e^{ikx} > \right\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Kadangi U tiesinis operatorius ir

$$\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx}),$$

tai

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j \sin kx - <1, \sin kx>\Big\|_{L^2} &= \Big\|\frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{ikx} - <1, e^{ikx}>\Big)\\ &\quad - \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{-ikx} - <1, e^{-ikx}>\Big)\Big\|_{L^2}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{ikx} - <1, e^{ikx}>\Big\|_{L^2}\\ &\quad + \frac{1}{2}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j e^{-ikx} - <1, e^{-ikx}>\Big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Analogišką sąryšį galime gauti ir funkcijoms $\cos lx$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Vadinasi,

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g - <1, g>\Big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

visoms funkcijoms g iš erdvės L^2 poaibio

$$\mathcal{G} = \big\{\sin kx, \cos lx,\ k, l = 0, 1, 2, \dots\big\}.$$

Poaibis $\mathcal{G}$ tiesiškai tankus (žr. 2.5.4 apibrėžimą) erdvėje L^2. Vadinasi,

$$\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g - <1, g>\Big\|_{L^2} \to 0$$

visoms $g \in L^2$.

Imdami $f \in L^2$ ir pasinaudoję Koši-Helderio nelygybe $| <h, r> | \leqslant \|h\|_{L^2}\|r\|_{L^2}$, $h \in L^2$, $r \in L^2$ gauname

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} <f, U^j g> - <f, 1><1, g>\Big| &= \Big|\Big\langle f, \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g\Big\rangle - \big\langle f, <1, g>\big\rangle\Big|\\ &= \Big|\Big\langle f, \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g - <1, g>\Big\rangle\Big|\\ &\leqslant \|f\|_{L^2}\Big\|\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} U^j g - <1, g>\Big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Gavome:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} <f, U^j g> = <f, 1><1, g>$$

visoms $f, g \in L^2$. Pagal 5.1.2 išvadą transformacija S ergodinė.

$\triangleleft$

5.3.2 PAVYZDYS. *Erdvėje* $\big([0,1]), \mathcal{B}, m\big)$ *apibrėžta transformacija* $S(x) = \{rx\}$, $r \geqslant 2$, $r \in \mathbb{N}$ *– fiksuotas skaičius. Parodysime, kad* S *yra užpildanti transformacija.*

$\triangleright$ Iš 4.1.1 pavyzdžio gauname, kad

$$Pf(x) = \frac{1}{r}\sum_{i=0}^{r-1} f\left(\frac{i}{r} + \frac{x}{r}\right) \quad \text{b. v.}$$

visoms $f \in L^1$ ir S išsaugo erdvės matą m. Sakykime f tolydi. Kadangi tolydi intervale $[0,1]$ funkcija yra integruojama, tai tokiai funkcijai išraiškos

$$P^n f(x) = \frac{1}{r^n}\sum_{i=0}^{r^n-1} f\left(\frac{i}{r^n} + \frac{x}{r^n}\right)$$

dešinėje pusėje yra f integralinė suma. Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} P^n f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy$$

tolygiai pagal x, t. y.

$$\max_{x\in[0,1]}\left|P^n f(x) - \int_0^1 f(y)\,dy\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Tuo pačiu

$$\|P^n f(x) - < f, 1 > \| = \int_0^1 \big|P^n f(x) - < f, 1 > \big|\,dx$$

$$\leqslant \max_{x\in[0,1]} \big|P^n f(x) - < f, 1 > \big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Kadangi tolydžių funkcijų aibė yra tiesiškai tanki erdvėje L^1 (žr. 2.5 skyrių), tai

$$\|P^n f(x) - < f, 1 > \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

visoms $f \in L^1$.

Iš 5.1.2 teoremos išplaukia, kad S yra užpildanti transformacija.

$\triangleleft$

5.3.3 PAVYZDYS. *Erdvėje* $\big([0,1]^2, \mathcal{B}, m\big)$ *apibrėžta transformacija* $S(x,y) = \big(\{x+y\}, \{x+2y\}\big)$. *Parodysime, kad* S *sumaišanti transformacija.*

$\triangleright$ Ši transformacija, kuri vadinama Anosovo difeomorfizmu, jau buvo nagrinėta 4.1.4 pavyzdyje. Buvo rastas šios trnasformacijos Perono operatorius ir nustatyta, kad S išsaugo matą m. Pagal 5.1.2 išvadą S sumaišanti tada ir tik tada, kai

$$\lim_{n\to\infty} < f, U^n g > = < f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f, g \in L^2$.

Erdvėje $L^2\big([(0,1]^2,\mathcal{B},m\big)$ funkcijų aibė

$$K=\big\{\sin 2\pi(kx+ly),\cos 2\pi(kx+ly),\ k,l\in\mathbb{Z}\big\}$$

sudaro tiesiškai tankų poaibį.

Imkime

$$\begin{aligned}g(x,y)&=\exp\{2\pi i(kx+ly)\},\quad k,l\in\mathbb{Z},\\ f(x,y)&=\exp\{-2\pi i(px+qy)\},\quad p,q\in\mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Nesunku pastebėti, kad

$$\begin{aligned}Ug(x,y)&=g\big(S(x,y)\big)=g\big(\{x+y\},\{x+2y\}\big),\\ U^2g(x,y)&=g\big(S\big(\{x+y\},\{x+2y\}\big)\big)=g\big(\{2x+3y\},\{3x+5y\}\big),\\ U^3g(x,y)&=g\big(S\big(\{2x+3y\},\{3x+5y\}\big)\big)=g\big(\{5x+8y\},\{8x+13y\}\big),\\ &\ldots\ldots\ldots\\ U^ng(x,y)&=g\big(\{a_{2n-2}x+a_{2n-1}y\},\{a_{2n-1}x+a_{2n}y\}\big),\end{aligned}$$

kur $\{a_n\}$ yra Fibonačio skaičių seka, t. y. seka, turinti savybes:

$$a_0=a_1=1,\quad a_{n+1}=a_n+a_{n-1}.$$

Mūsų pasirinktoms funkcijoms $f(x,y)$ ir $g(x,y)$

$$\begin{aligned}<f,U^ng>&=\int_0^1\!\!\int_0^1\exp\{-2\pi i(px+qy)\}\exp\{2\pi i(ka_{2n-2}x+ka_{2n-1}y+la_{2n-1}x+la_{2n}y)\}\,dxdy\\ &=\int_0^1\!\!\int_0^1\exp\{2\pi i(ka_{2n-2}+la_{2n-1}-p)x+2\pi i(ka_{2n-1}+la_{2n}-q)y\}\,dxdy.\end{aligned}$$

Vadinasi,

$$<f,U^ng>=\begin{cases}1, & \text{jei } (ka_{2n-2}+la_{2n-1}-p)=(ka_{2n-1}+la_{2n}-q)=0,\\ 0 & \text{kitais atvejais.}\end{cases}$$

Parodysime, kad bent vienas iš reiškinių

$$ka_{2n-2}+la_{2n-1}-p,\qquad ka_{2n-1}+la_{2n}-q \tag{5.3}$$

nelygus 0 pakankamai dideliems n, jeigu bent vienas iš skaičių k,l,p,q nelygus 0.

I. Jei $k=l=0$, bet $p\neq 0$ arba $q\neq 0$, tai akivaizdu, kad bent vienas iš reiškinių (5.3) nelygus 0.

II. Sakykime dabar $k\neq 0$ arba $l\neq 0$. Žinoma, kad

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\infty,\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}=\frac{2}{1+\sqrt5},$$

todėl

$$\lim_{n\to\infty}\left(k\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}}+l-\frac{p}{a_{2n-2}}\right)=\frac{2k}{1+\sqrt5}+l.,$$

Jei $k \neq 0$ arba $l \neq 0$, tai paskutinis narys nelygus 0. Vadinasi, pakankamai dideliems n

$$k\frac{a_{2n-2}}{a_{2n-1}} + l - \frac{p}{a_{2n-1}} \neq 0.$$

Taigi

$$ka_{2n-2} + la_{2n-1} - p \neq 0$$

pakankamai dideliems n.

Gavome, kad pakankamai dideliems n

$$ka_{2n-2} + la_{2n-1} - p = ka_{2n-1} + la_{2n} - q = 0$$

tada ir tik tada, kai $k = l = p = q = 0$.

Vadinasi,

$$< f, U^n g >= \begin{cases} 1, & \text{jei } k = l = p = q = 0, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

kai n pakankamai didelis.

Antra vertus

$$< 1, g >= \int_0^1 \int_0^1 \exp\{2\pi i(kx + ly)\}\, dxdy = \begin{cases} 1, & \text{jei } k = l = 0, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Analogiškai

$$< f, 1 >= \int_0^1 \int_0^1 \exp\{-2\pi i(px + qy)\}\, dxdy = \begin{cases} 1, & \text{jei } p = q = 0, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Taigi pakankamai dideliems n

$$< f, U^n g >=< f, 1 >< 1, g >= \begin{cases} 1, & \text{jei } k = l = p = q = 0, \\ 0 & \text{kitais atvejais.} \end{cases}$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} < f, U^n g >=< f, 1 >< 1, g >$$

visoms funkcijoms turinčioms pavidalą

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \exp\{-2\pi i(px + qy)\}, \qquad p, q \in \mathbb{Z}, \\ g(x, y) &= \exp\{2\pi i(kx + ly)\}, \qquad k, l \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Kadangi U tiesinis operatorius, tai iš gautos lygybės išplaukia, kad

$$\lim_{n\to\infty} < f, U^n g >=< f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f, g \in K \subset L^2$.

Kadangi K tiesiškai tankus erdvėje L^2, tai iš paskutinės lygybės išplaukia (žr. 2.5.1 teoremą), kad

$$\lim_{n\to\infty} < f, U^n g >=< f, 1 >< 1, g >$$

visoms $f, g \in L^2$.

Iš 5.1.2 išvados išplaukia, kad Anosovo difeomorfizmas yra sumaišanti transformacija.

$\triangleleft$

Naudota literatūra

1. J. Kubilius. *Realaus kintamojo funkcijų teorija*. Vilnius: Mintis. 1970.
2. J. Kubilius. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*. Vilniaus universiteto leidykla. 1996.
3. П. Р. Халмош. *Теория меры*. Москва: ИЛ. 1953.
4. V. Kabaila. *Matematinė analizė*. I dalis. Vilnius: Mokslas. 1983.
5. А. Р. Ширяев. *Вероятность*. Москва: Наука. 1989.
6. Г. Шустер. *Детерминированный хаос*. Москва: Мир. 1988.
7. Э. Петерс. *Хаос и порядок на рынках капитала*. Москва: Мир. 2000.
8. A. Lasota, M. C. Mackey. *Probabilistic Properties of Deterministic Systems*. London, New York, Cambridge, Melburn, Sydney: Cambridge University Press. 1985.
9. A. Lasota, M. C. Mackey. *Choos, Fractals, and Noise. Stochastic Aspects of Dynamic*. London, New York: Springer. 2001.
10. P. Tannenbaumas, R. Arnoldas. *Kelionės į šiuolaikinę matematiką*. Vilnius: TEV. 1995.